Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

Ю. А. ШАШКИН

# НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 60

Ю. А. ШАШКИН

# НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.151.0
Ш32
УДК 514.11(023)

Рецензент
доктор физико-математических наук *В. Г. Болтянский*

**Шашкин Ю. А.**

Ш32 Неподвижные точки. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 80 с. — (Популярные лекции по мат.; Вып. 60)

ISBN 5-02-013922-X

Теорема о неподвижной точке есть утверждение о том, что некоторое уравнение (или система уравнений) имеет решение. Доказываются топологические теоремы о неподвижных точках непрерывных отображений отрезка, квадрата, окружности и сферы. В доказательствах используются различные формы комбинаторно-геометрической леммы Шперне-ра и понятие степени отображения.

Для школьников старших классов и студентов младших курсов вузов.

Ш $\frac{1602050000-040}{053(02)-89}$ 39-89

ББК 22.151.0

ISBN 5-02-013922-X

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1989

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . . 4
§ 1. Непрерывные отображения отрезка и квадрата . . . . 7
§ 2. Первая комбинаторная лемма . . . . . 10
§ 3. Вторая комбинаторная лемма, или прогулки по комнатам дома . . . . . 11
§ 4. Лемма Шпернера . . . . . 13
§ 5. Непрерывные отображения. Гомеоморфизмы. Свойство неподвижной точки . . . . . 18
§ 6. Компактность . . . . . 23
§ 7. Доказательство теоремы Брауэра для отрезка. Теорема о промежуточных значениях. Приложения . . . . . 27
§ 8. Доказательства теоремы Брауэра для квадрата . . . . 36
§ 9. Метод итераций . . . . . 42
§ 10. Ретракция . . . . . 46
§ 11. Непрерывные отображения окружности. Гомотопия. Степень отображения . . . . . 50
§ 12. Второе определение степени отображения . . . . . 56
§ 13. Непрерывные отображения сферы . . . . . 58
Решения и ответы . . . . . 66
Список литературы . . . . . 76

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Применять математику — значит во многих случаях решать уравнения. При этом важно знать заранее, имеются ли у них корни. Наличие корней уравнений гарантируется так называемыми теоремами существования. Вот одна из простейших теорем такого типа: если функция $f$ от действительной переменной $x$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то уравнение

$$f(x) = 0 \tag{0.1}$$

имеет на этом отрезке по крайней мере один корень.

Часто теоремы существования выражаются в виде принципов неподвижной точки. Желая, например, найти корень уравнения (0.1) на отрезке $[a, b]$, его преобразуют к виду $\lambda f(x) + x = x$, где $\lambda$ — некоторый параметр. Если теперь ввести обозначение $\lambda f(x) + x = F(x)$, то мы приходим к уравнению

$$F(x) = x. \tag{0.2}$$

Выберем параметр $\lambda$ так, чтобы все значения функции $F$ лежали на отрезке $[a, b]$. Тогда на уравнение (0.2) можно смотреть следующим образом. Если применить к точке (действительному числу) $x$ из отрезка $[a, b]$ функцию (или, как говорят, отображение) $F$, то в результате получится какая-то точка $F(x) = y$ из этого же отрезка, вообще говоря, отличная от $x$; иными словами, отображение $F$ перемещает $x$ в точку $y$. Но если точка $x_0$ является корнем уравнения (0.2), то она никуда не перемещается, остается неподвижной. Эта же точка, конечно, служит и корнем уравнения (0.1).

Таким образом, на геометрическом языке теорема о разрешимости уравнения (0.2) формулируется в виде следующего принципа неподвижной точки:

если $F$ — непрерывная функция, отображающая отрезок в себя, то имеется хотя бы одна неподвижная точка. Так как $F$ — совершенно произвольное непрерывное отображение, то здесь проявляется свойство самого отрезка, не зависящее от конкретного выбора отображения и называемое свойством неподвижной точки.

Аналогично, вопрос о разрешимости системы двух уравнений

$$\begin{cases} f(x, y) = a, \\ g(x, y) = b \end{cases}$$

относительно неизвестных $x$ и $y$ можно свести к вопросу о существовании неподвижной точки при отображении квадрата (или, например, круга) в себя.

Теоремы о неподвижных точках имеют многочисленные применения в математике: к ним сводятся в большинстве своем теоремы существования решений дифференциальных, интегральных, операторных и других уравнений, они используются в новых прикладных разделах математики — математической экономике, теории игр.

Предлагаемая вниманию читателя книга посвящена, по существу, одному вопросу: обладают ли свойством неподвижной точки такие фигуры, как отрезок, квадрат, окружность, сфера?

Теория неподвижных точек является частью топологии (см. книги [3] и [5]) — раздела математики, созданного в конце XIX века. В этой теории существенно используются такие топологические понятия, как непрерывность, компактность, гомотопия, степень отображения.

Цель нашей книги также — рассказать о применении в этой теории комбинаторных соображений, связанных с разбиением (триангуляцией) фигур на отдельные части — грани (симплексы), правильно примыкающие друг к другу.

Три имени должны быть названы в этом предисловии.

Первое имя — знаменитый французский математик А. Пуанкаре (1854—1912), основоположник метода неподвижных точек, глубоко предвидевший его значение для задач математического анализа и небесной механики и много работавший над этим. Пуанкаре первым применил в топологии комбинаторный метод — метод триангуляции геометрических образов на симплексы.

Второе имя — голландский математик Л. Э. Я. Брауэр (1881—1966). Им были введены топологические понятия, используемые в этой книге: гомотопия, степень отображения; доказаны теоремы о неподвижной точке для квадрата, сферы и их $n$-мерных аналогов. Это было сделано в 1910—1911 гг.

Третье имя — немецкий математик Э. Шпернер (1905—1980), доказавший в 1928 г. комбинаторно-геометрическую лемму о разбиении треугольника (и вообще $n$-мерного симплекса), играющую важную роль в теории неподвижных точек.

Автор сердечно благодарит В. Г. Болтянского, чьи замечания позволили существенно улучшить первый вариант рукописи. Автор признателен Е. Г. Пыткееву, беседы с которым во время работы над книгой были очень полезными.

## § 1. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ОТРЕЗКА И КВАДРАТА

Рассмотрим отрезок $I = [0, 1]$, лежащий на числовой прямой $\mathbb{R}$. Пусть $f$ — *функция*, отображающая $I$ в себя. Это значит, что каждой точке $x$ отрезка $I$ по некоторому правилу поставлена в соответствие единственная точка $f(x)$ из этого же отрезка, называемая *образом* точки $x$, или что точка $x$ *переходит* в свой образ $f(x)$. Вместо слова *функция* будем в этом случае говорить также *отображение*: эти слова будут для нас синонимами. Единственное требование, предъявляемое к отображению $f$,— быть непрерывным. Интуитивно непрерывность ясна: график такого отображения является непрерывной линией, которую можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги. Говорят еще, что отображение непрерывно, если оно переводит близкие точки в близкие. Пока мы ограничимся таким наглядным описанием, откладывая точное определение до § 5.

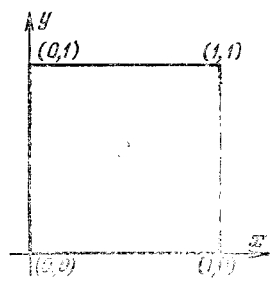


Рис. 1

Рассмотрим квадрат $Q$, лежащий на координатной плоскости $\mathbb{R}^2$, такой, что декартовы координаты всех его точек удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ (рис. 1). Пусть $f$ — непрерывное отображение квадрата $Q$ в себя. Это значит, что каждая точка $p$ из $Q$ переходит в определенную точку $f(p)$ этого же квадрата, образ точки $p$, причем образы близких точек тоже близки. Задать такое отображение — значит указать две числовые непрерывные функции $g(x, y)$ и $h(x, y)$, которые заданы на квадрате $Q$ и удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant g(x, y) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant h(x, y) \leqslant 1. \tag{1.1}$$

Если $(x_0, y_0)$ — точка из квадрата, то ее образом при таком отображении $f$ будет точка с координатами $(g(x_0, y_0), h(x_0, y_0))$, тоже лежащая в квадрате ввиду неравенств (1.1).

Уточним еще раз соотношение между понятиями *отображение* и *функция*. Первое из них мы употребляем в широком смысле, как отображение любого множества в любое (то же самое или другое) множество. Слово функция всегда обозначает отображение какого-то множества в числовую прямую.

Теорема Брауэра о неподвижной точке гласит: *всякое непрерывное отображение $f$ отрезка в себя имеет по крайней мере одну неподвижную точку, т. е. такую точку $x_0$, что $f(x_0) = x_0$; всякое непрерывное отображение квадрата в себя тоже имеет по крайней мере одну неподвижную точку.*

Подчеркнем еще раз, что в этой теореме от отображения $f$ не требуется ничего, кроме непрерывности; в этом — ее большая общность.

Вот интуитивное наглядное доказательство этой теоремы для отрезка (рис. 2): график функции $f$ есть непрерывная кривая, соединяющая какую-то точку на левой стороне квадрата с точкой на правой его стороне; следовательно, она должна пересекать диагональ этого квадрата; но координаты $(x_0, f(x_0))$ точки графика, лежащей на диагонали, удовлетворяют равенству $f(x_0) = x_0$.

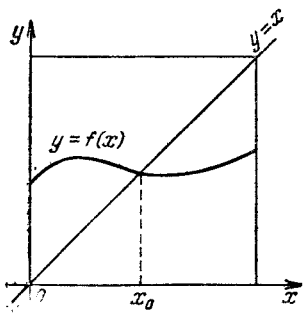


Рис. 2

Чтобы дать наглядное доказательство теоремы для квадрата, надо представить себе график его отображения $f$. Но точка квадрата имеет две координаты, ее образ — тоже две. Поэтому пара, состоящая из точки и ее образа, описывается четырьмя координатами. Иными словами, график отображения $f$ есть некоторая кривая поверхность в четырехмерном пространстве. Представить себе эту поверхность очень трудно, поэтому приходится избрать другой путь, а именно дать два рисунка вместо одного.

Итак, вот это наглядное доказательство. На рис. 3, *а* отображаемый в себя квадрат обозначен $ABCD$; прямо-

угольник $ADGF$ есть часть плоскости $z = x$, лежащая над квадратом $ABCD$ (иначе говоря, $ADGF$ есть график функции двух переменных, равной $x$); $IJKL$ — непрерывная поверхность $z = g(x, y)$ (график функции, равной $g(x, y)$); $MN$ — линия пересечения плоскости $z = x$ с поверхностью $z = g(x, y)$; линия $PQ$ — проекция $MN$ на плоскость $z = 0$. Непрерывная кривая $PQ$ соединяет противоположные стороны $AB$ и $CD$ квадрата, а координаты всех точек этой кривой удовлетворяют уравнению $g(x, y) = x$.

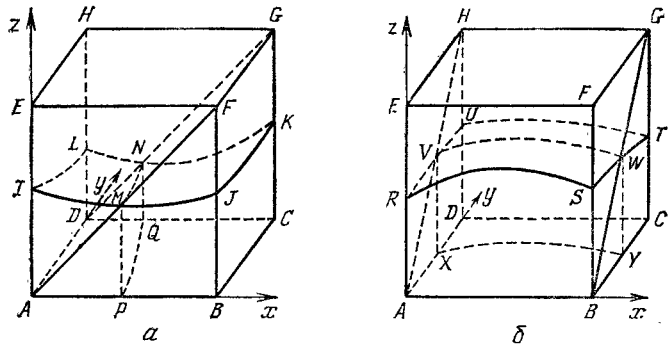



Рис. 3

Аналогично, на рис. 3, *б* прямоугольник $ABGH$ есть график функции $z = y$; кривая поверхность $RSTU$ — график функции $z = h(x, y)$; $VW$ — линия пересечения этих двух графиков и $XY$ — проекция этой линии на плоскость $z = 0$. Непрерывная кривая $XY$ соединяет противоположные стороны $BC$ и $AD$ квадрата, а координаты всех ее точек удовлетворяют уравнению $h(x, y) = y$. Теперь ясно, что кривые $PQ$ и $XY$ должны пересечься хотя бы в одной точке $(x_0, y_0)$, и эта точка неподвижна, так как выполнены равенства $g(x_0, y_0) = x_0$, $h(x_0, y_0) = y_0$.

Чтобы подойти к строгому доказательству теоремы Брауэра, нам будут нужны новые понятия и факты. Это, во-первых, комбинаторные леммы, связанные с разбиением отрезка и квадрата (или треугольника) на конечное число малых частей; во-вторых — уточнение понятия непрерывности отображения; в-третьих — понятие компактности.

## ЗАДАЧИ

1. На числовой прямой $\mathbb{R}$ заданы функции

$$f_1(x) = 2x, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \quad f_4(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Какие из них отображают отрезок $[0, 1]$ в себя?

2. Для каждого из следующих множеств укажите пример непрерывного отображения этого множества в себя без неподвижных точек: а) числовая прямая; б) полуинтервал $(0, 1]$; в) пара отрезков $[-2, -1]$ и $[1, 2]$.

3. Укажите пример разрывного (т. е. не непрерывного) отображения отрезка $[0, 1]$ в себя, не имеющего неподвижных точек.

4. Если $f$ — непрерывная функция, то функция $f^2$ определяется так: $f^2(x) = f[f(x)]$, т. е. для получения $f^2(x)$ надо применить функцию $f$ к точке $f(x)$. Непрерывное отображение $f$ отрезка $[0, 1]$ в себя называется *инволюцией*, если $f^2$ оставляет неподвижной каждую точку отрезка. Иначе говоря, это значит, что функция $f$ обратна самой себе.

Проверьте, что следующие функции являются инволюциями:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 1 - x, \quad f_3(x) = \frac{1-x}{1+x},$$

$$f_4(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad f_5(x) = 1 - \sqrt{1-(x-1)^2}.$$

Здесь $\sqrt{\ }$ обозначает арифметическое значение корня.

Инволюция $f(x) = x$ называется *тривиальной*.

Докажите, что каждая нетривиальная инволюция имеет в точности одну неподвижную точку.

## § 2. ПЕРВАЯ КОМБИНАТОРНАЯ ЛЕММА

Так будем называть следующую лемму 1. Другое ее название — лемма Шпернера для отрезка.

Лемма 1. *Пусть отрезок разбит конечным множеством точек на малые отрезки. Пусть левый его конец отмечен числом* 0, *правый конец — числом* 1, *и каждая точка деления имеет отметку* 0 *или* 1. *Тогда существует малый отрезок, концы которого отмечены разными числами. Более того, имеется нечетное число таких отрезков.*

Доказательство. Назовем малый отрезок «хорошим», если его концы получили разные отметки. Возможны только два случая: либо отметка 0 стоит у всех точек деления, либо хоть одна из них отмечена числом 1. В первом случае имеется в точности один хороший отрезок, а именно самый правый малый (рис. 4, *а*). Во втором случае рассмотрим самую левую точку деления среди тех, которые отмечены числом 1. Очевидно, малый

отрезок, имеющий эту точку своим правым концом, будет хорошим (рис. 4, *б*).

Покажем теперь, что число хороших отрезков обязательно нечетно. Для этого будем двигаться по большому отрезку слева направо, начиная с его левого конца, и последовательно нумеровать все встречающиеся хорошие отрезки: первый, второй и т. д. Тогда каждый хороший отрезок с нечетным номером будет иметь слева

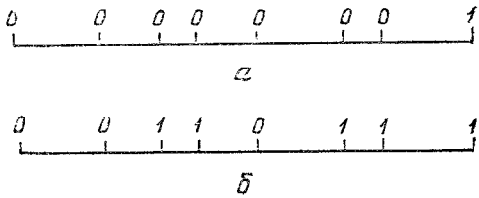



Рис. 4

отметку 0, справа отметку 1, а с четным номером — наоборот. Так как у последнего хорошего отрезка, очевидно, справа стоит отметка 1, то число всех хороших отрезков нечетно. Лемма доказана.

Эту лемму можно еще уточнить так. Назовем хороший отрезок отрезком типа (0, 1), если слева у него стоит отметка 0, а справа — отметка 1, и отрезком типа (1, 0) в противном случае. Тогда число отрезков типа (0, 1) на единицу больше числа отрезков типа (1, 0). Читатель сам легко проверит это утверждение.

## § 3. ВТОРАЯ КОМБИНАТОРНАЯ ЛЕММА, ИЛИ ПРОГУЛКИ ПО КОМНАТАМ ДОМА

Эту лемму мы формулируем как утверждение о комнатах и дверях дома (рис. 5). Пусть известно, что число дверей в каждой комнате равно 0, или 1, или 2. Комната с одной дверью называется *тупиком*, с двумя дверями — *проходной комнатой*. Дверь может быть *наружной*, ведущей из дома на улицу, и *внутренней*, соединяющей две соседние комнаты. Естественно еще считать, что комната может иметь только одну наружную дверь, а две соседние комнаты — не более одной общей двери.

Лемма 2. *Пусть каждая комната дома имеет* 0, *либо* 1, *либо* 2 *двери. Тогда число тупиков и число наружных дверей имеют одинаковую четность.*

Это значит, что указанные числа либо оба четны, либо оба нечетны.

Для доказательства леммы опишем прогулки по комнатам дома. Они будут выполняться с соблюдением следующих правил. Во-первых, через каждую дверь разрешается проходить не более одного раза. Во-вторых, прогулка начинается либо с улицы в дом через наружную дверь, либо из тупика, затем продолжается

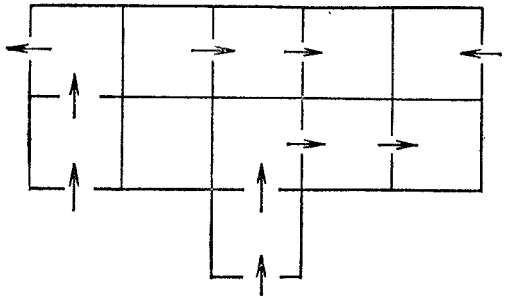


Рис. 5

через проходные комнаты и заканчивается в одном из двух случаев: когда мы выходим из дома наружу или когда попадаем в тупик (см. рис. 5). Благодаря предположению о числе дверей в комнатах, эти правила однозначно определяют маршрут каждой прогулки: ведь входя в проходную комнату, мы можем выйти из нее только одним способом. Закончив одну прогулку, мы начинаем другую, и так до тех пор, пока не исчерпаем все наружные двери и все тупики.

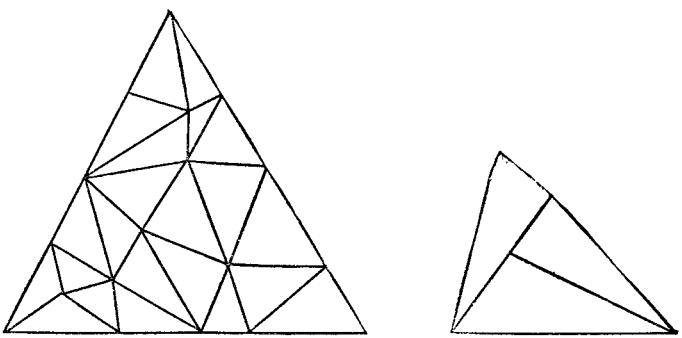
В результате получаются пути трех типов: 1) от наружной двери в тупик (или обратно, что несущественно), 2) от одной наружной двери к другой такой же двери, 3) из тупика в тупик.

Обозначим через $m$, $n$ и $p$ числа путей первого, второго и третьего типа соответственно. Так как каждому пути первого типа соответствует одна наружная дверь, а каждому пути второго типа — две наружные двери, то общее число таких дверей равно $m + 2n$. Аналогично, общее число тупиков равно $m + 2p$. Числа $m + 2n$ и $m + 2p$ имеют одинаковую четность, и поэтому лемма доказана.

Отметим, что в этой лемме форма комнат не играет никакой роли. Они могут быть, например, треугольными, как чаще всего и будет предполагаться в дальнейшем.

## § 4. ЛЕММА ШПЕРНЕРА

Рассмотрим треугольник произвольной формы, разбитый на малые треугольники. Мы всегда будем предполагать, что это разбиение удовлетворяет следующим условиям: любые два малых треугольника либо совсем не имеют общих точек, либо имеют только общую вершину или общую сторону. Такое разбиение исходного треугольника называется *триангуляцией*, малые треугольники называются *гранями* триангуляции, стороны малых треугольников — ее *ребрами*, а их вершины — ее *вершинами*.



*а* *б*

Рис. 6

Таким образом, например, разбиение на рис. 6, *а* является триангуляцией, а на рис. 6, *б* — нет.

Лемма 3 (Шпернера). *Пусть имеется триангуляция треугольника $T$. Вершины этого треугольника отмечены числами* 1, 2 *и* 3. *Вершины триангуляции нумеруются этими же числами с соблюдением следующего граничного условия: если вершина какой-то грани лежит на стороне треугольника $T$, то она нумеруется одним из тех двух чисел, которые соответствуют вершинам этой стороны. Тогда вершины хотя бы одной грани несут три различные отметки, т. е.* 1, 2 *и* 3. *Более того, имеется нечетное число таких граней.*

Лемма 3 иллюстрируется рис. 7. Она будет доказана сведением к лемме 2. Условимся называть домом треугольник $T$, комнатами — все грани его триангуляции, дверями назовем ребра триангуляции, но не все, а только те, которые имеют отметки 1 и 2, или, как мы

скажем, ребра типа (1, 2). (Заметим, что в отличие от леммы 1, мы здесь не различаем ребра типа (1, 2) и типа (2, 1).) Посмотрим, что в таком случае следует называть тупиком. Рассмотрим все возможные случаи распределения отметок 1, 2 и 3 по вершинам грани. Таких случаев (типов) будет всего десять: (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 3), (2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 3), (3, 3, 3). Просматривая этот список, легко видеть, что грани типа (1, 2, 3), и только они, имеют в точности по одному ребру типа (1, 2), и поэтому именно их следует называть тупиками. Аналогично, грани типов (1, 1, 2) и (1, 2, 2) следует назвать проходными комнатами, так как именно они имеют в точности по два ребра (1, 2). Таким образом, получается следующий словарь для перевода условий леммы 3 на язык леммы 2:

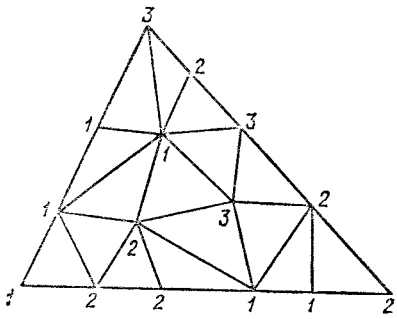


Рис. 7

| | |
|---|---|
| треугольник $T$ | — дом, |
| грань триангуляции | — комната, |
| ребро триангуляции типа (1, 2) | — дверь, |
| ребро (1, 2), лежащее на границе (внутри) треугольника $T$ | — наружная (внутренняя) дверь, |
| грань (1, 2, 3) | — тупик, |
| грань типа (1, 1, 2) или (1, 2, 2) | — проходная комната. |

Как бы мы ни отмечали вершины триангуляции числами 1, 2, 3, из приведенного выше списка видно, что произвольная грань либо не имеет ни одного ребра (1, 2), либо имеет одно или два таких ребра. Следовательно, выполнены условия леммы 2. Значит, число тупиков и число наружных дверей оба четны или оба не-

четны. После обратного перевода на язык леммы 3 заключаем, что одинаковую четность имеют также число граней (1, 2, 3) и число граничных ребер (1, 2). Остается показать, что последнее число нечетно. Но так как граничные ребра (1, 2) лежат только на стороне треугольника $T$ с отметками 1 и 2 и не могут лежать на других его сторонах, то нужное заключение сразу следует из леммы 1. Лемма 3 доказана.

Метод, использованный для ее доказательства, будем называть *методом прогулок*. В дальнейшем в случае его применения «гулять» можно будет прямо по граням триангуляции, не обязательно называя их комнатами. При этом всегда самое важное будет состоять в том, что следует понимать под ребром-дверью и гранью-тупиком.

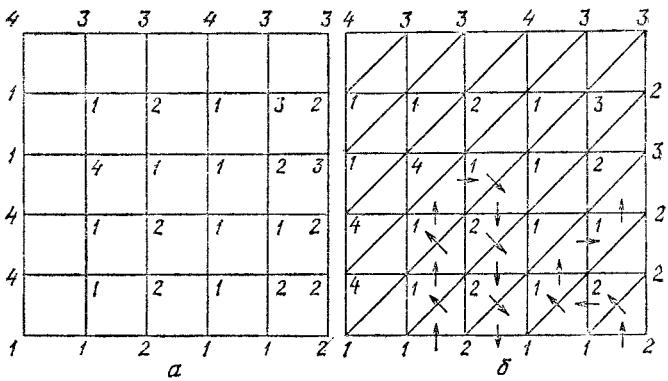



Рис. 8

Применим эти соображения к доказательству следующей леммы 4 — аналога леммы 3 для квадрата. В ней квадрат $Q$ разбит на малые квадраты прямыми, параллельными его сторонам. Для такого разбиения мы также будем применять названия: грани, ребра и вершины разбиения, понимая, например, под гранями малые квадраты.

Лемма 4. *Пусть квадрат $Q$ разбит на грани прямыми, параллельными его сторонам. Вершины квадрата отмечены числами* 1, 2, 3 *и* 4. *Вершины разбиения нумеруются этими же числами так, что выполняется граничное условие: если вершина разбиения лежит на стороне квадрата $Q$, то она получает одну из двух отметок, отнесенных концам этой стороны* (рис. 8, *а*). *Тогда по край-*

*ней мере одна грань имеет не менее трех различных отметок.*

Для доказательства разобьем каждую грань на две треугольные (рис. 8, *б*). Тогда получим триангуляцию квадрата $Q$, вершины которой занумерованы. Назовем *дверью* ребро с отметками (1, 2), а *тупиком* — треугольную грань с тремя разными отметками, среди которых имеются 1 и 2. Таким образом, тупики — это треугольники типа (1, 2, 3) или (1, 2, 4).

По условию леммы 4 все наружные двери расположены на стороне (1, 2) квадрата, а по лемме 1 их число нечетно.

Каждую прогулку по треугольным граням мы начинаем, входя в квадрат через наружную дверь, а заканчиваем в одном из двух случаев: когда выходим из квадрата через другую наружную дверь или когда попадаем в тупик (см. рис. 8, *б*). Так как общее число наружных дверей нечетно, то хотя бы одна из прогулок должна окончиться в тупике. Это значит, что имеется треугольная грань с отметками (1, 2, 3) или (1, 2, 4), а потому — и квадратная грань, имеющая не менее трех различных отметок.

## ЗАДАЧИ

**5.** Докажите первую комбинаторную лемму методом прогулок. Для этого представьте себе, что отрезок — это дом в одномерной стране Лайнландии (от английских слов *line* — линия или прямая, *land* — страна). Какой вид имеют здесь комнаты, двери, тупики?

**6.** Пусть имеется триангуляция квадрата $Q$, как указано на рис. 8, *б* или 9. Каждая из вершин триангуляции отмечается одним из чисел 1, —1, 2, —2. Граничное условие состоит в том, что вершины, лежащие в противоположных точках границы квадрата $Q$ (т. е. таких, что соединяющий их отрезок проходит через центр $Q$), отмечаются противоположными числами (см. рис. 9). Докажите, что найдется ребро триангуляции, концы которого отмечены противоположными числами, т. е. ребро типа (1, —1) или (2, —2).

**7.** Пусть все поля шахматной доски (обычного размера $8 \times 8$ или любой прямоугольной доски размера $m \times n$) поделены произвольным образом между королем и ладьей так, что каждая из этих фигур может ходить (в соответствии с обычными шахматными правилами) только по своим полям (рис. 10). Предположим, что ни с какого поля левого края доски король не может добраться до правого края. Тогда ладья сумеет пройти от нижнего края доски к верхнему. Докажите это.

Сохранится ли это утверждение, если короля заменить ферзем? А в случае двух ладей?

**8.** (Игра «гекс».) В гекс играют на доске, имеющей форму ромба, составленного из правильных шестиугольников (отсюда — название игры: «гексагон» значит «шестиугольник») (рис. 11). Обычно доска состоит из $11 \times 11$ шестиугольных полей, но для

нас ее размер может быть произвольным. Считается, что две противоположные стороны доски принадлежат игроку, имеющему белые фишки, и поэтому называются «белыми», две другие стороны принадлежат игроку с черными фишками и называются «черными». Угловые поля относятся к обеим прилегающим к ним сторонам. Игроки по очереди ставят по одной своей фишке на поля,

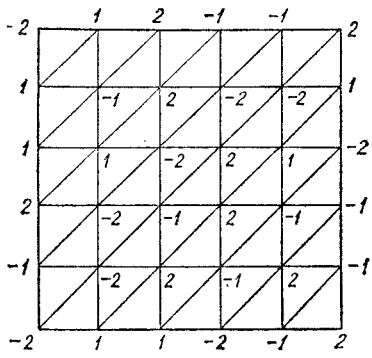



Рис. 9

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Л | К | К | К | К | К | К | Л |
| К | Л | Л | К | Л | Л | Л | Л |
| Л | К | Л | К | Л | Л | К | К |
| К | К | К | К | К | Л | К | Л |
| Л | Л | Л | Л | Л | Л | К | Л |
| К | Л | К | К | К | К | Л | К |
| К | Л | Л | Л | К | К | Л | К |
| К | К | К | Л | Л | К | К | Л |

Рис. 10

еще не занятые другими фишками. Цель каждого игрока — соединить свои стороны доски связной цепью из своих фишек. Например, на рис. 11 черные выиграли. Докажите, что игра в гекс обязательно заканчивается выигрышем одного игрока, т. е. что ничьих не может быть.

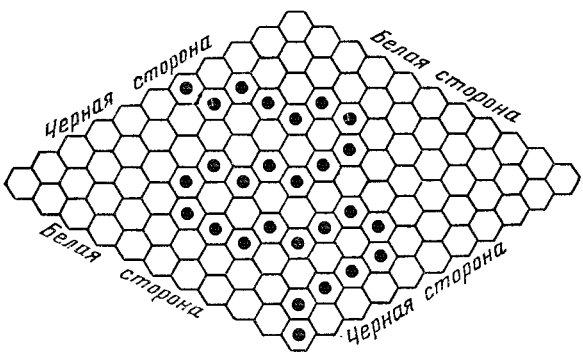



Рис. 11

9. Квадрат $Q$ разбит на малые квадраты (грани) прямыми, параллельными его сторонам. Контур квадрата $Q$ *ориентирован*, т. е. на нем указано стрелками направление обхода, при котором внутренние точки $Q$ остаются все время слева (или все время справа). На каждом из остальных ребер разбиения указано некоторое направление, причем для каждой вершины разбиения, лежащей внутри $Q$, имеются два входящих в нее ребра и два выходящих

(рис. 12). Докажите, что найдется хотя бы одна ориентированная грань (на рис. 12 такая грань в точности одна — правая нижняя).

10. *Многоугольником* называется плоская фигура, составленная из конечного числа треугольников (граней) так, что: а) любые две грани либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону (ребро); б) из каждой вершины можно пройти в любую другую, проходя по ребрам; в) фигура не имеет «дыр». Таким образом, многоугольник мы считаем заданным его триангуляцией.

*Кратностью* вершины триангуляции называется число ребер, имеющих эту вершину своим концом. Докажите, что число вершин триангуляции многоугольника, имеющих нечетную кратность, четно.

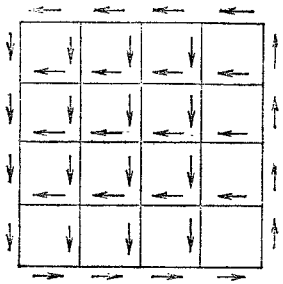


Рис. 12

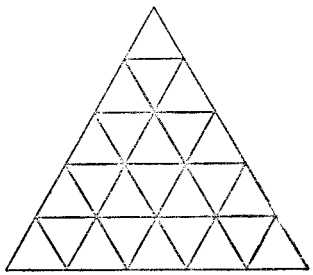


Рис. 13

11. В лемме Шпернера ищутся грани триангуляции, отмеченные тремя разными числами, например 0, 1 и 2. Пусть имеется такая триангуляция многоугольника, что: а) каждая ее грань несет три разных отметки 0, 1 и 2. Докажите, что тогда: б) все грани триангуляции можно правильно раскрасить в два цвета (например, белый и черный), т. е. так, что каждые две соседние грани (имеющие общее ребро) окрашены различно. Докажите, что и обратно, из утверждения б) следует а).

12. Имеется триангуляция треугольника, полученная следующим образом: каждая сторона треугольника делится на $m$ равных частей ($m$ — любое натуральное число) и через точки деления проводятся прямые, параллельные его сторонам (рис. 13). Каждая вершина триангуляции окрашена в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что число «пестрых» ребер триангуляции четно.

Верно ли это утверждение для любых триангуляций треугольника? Если нет, то для каких именно триангуляций оно верно?

## § 5. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. ГОМЕОМОРФИЗМЫ. СВОЙСТВО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Как было сказано выше, непрерывные отображения — это такие, которые переводят близкие точки в близкие. Мы сейчас должны уточнить это определение.

Близость или удаленность точек определяется расстоянием между ними; точка $y$ считается близкой (или достаточно близкой) к точке $x$, если расстояние между ними меньше некоторого числа $r > 0$; все такие точки $y$, близкие к точке $x$, образуют, как говорят, ее *r-окрестность*. Геометрически, на плоскости, эта $r$-окрестность представляет собой круг с исключенной граничной окружностью, имеющий радиус $r$ и центр в точке $x$. В пространстве эта окрестность — шар с исключенной граничной сферой. Если $X$ — множество, лежащее на плоскости (например, прямая, окружность, квадрат и т. д.) и $x$ — его точка, то $r$-окрестность точки $x$ в множестве $X$ есть, по определению, множество всех точек из $X$, расстояние которых от $x$ меньше $r$. Следовательно, такая окрестность представляет собой пересечение множества $X$ и круга радиуса $r$ (рис. 14).

Пусть теперь $X$ и $Y$ — множества (для определенности — на плоскости) и $f$ — отображение $X$ в $Y$. Обычно это записывается так: $f\colon X \to Y$. Если $x$ — точка в $X$ и $y = f(x)$, то, как мы знаем, $y$ называется *образом* точки $x$; точку $x$ называют в этом случае *прообразом* точки $y$.

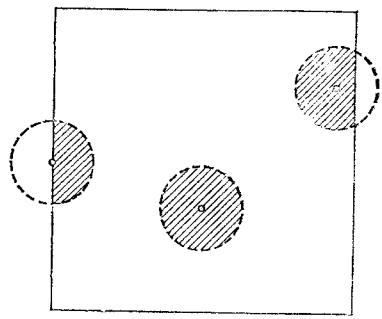


Рис. 14

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что образ каждой точки из $\delta$-окрестности точки $x$ лежит в $\varepsilon$-окрестности точки $y$.

Итак, непрерывность отображения в точке $x$ означает, что если мы возьмем не одну какую-нибудь, а любую, совершенно произвольную окрестность точки-образа $y$, то для нее должна найтись соответствующая ей и зависящая от нее окрестность точки-прообраза $x$; соответствующая в том смысле, что все точки из второй окрестности при отображении переходят в первую окрестность.

Если отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно в каждой точке множества $X$, то говорят, что оно *непрерывно на* $X$ или просто непрерывно.

Пример 1. Проецирование квадрата на его сторону $AB$ есть отображение, переводящее любую точку $x$ квадрата в основание перпендикуляра $f(x)$, опущенного из $x$ на $AB$ (рис. 15). Какова бы ни была $\varepsilon$-окрестность точки $f(x)$, в нее проектируется $\delta$-окрестность точки $x$, имеющая тот же самый радиус. Поэтому для любого числа $\varepsilon > 0$ нашлось соответствующее ему число $\delta > 0$, притом равное $\varepsilon$. Значит, проецирование непрерывно всюду в квадрате.

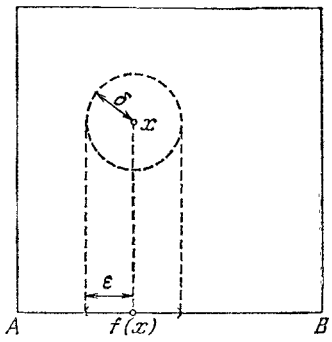



Рис. 15

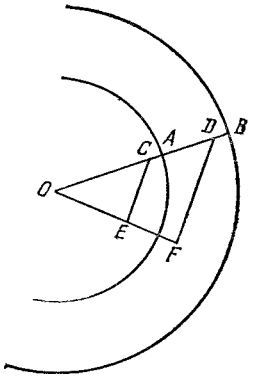



Рис. 16

Пример 2. Пусть $K_1$ и $K_2$ — концентрические круги с центром в точке $O$ и радиусами $r$ и $R > r$ соответственно. Определим отображение $f$: $K_1 \to K_2$ следующим образом. Пусть точка $O$ переходит в себя, а каждый радиус $OA$ круга $K_1$ отображается линейно на радиус $OB$ круга $K_2$, имеющий то же направление (рис. 16). Линейность отображения означает, что если точка $C$ переходит при этом в $D$, то

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}.$$

Если еще при этом точка $E$ переходит в $F$, то из подобия треугольников $OCE$ и $ODF$ (см. рис. 16) следует, что длина отрезка $CE$ при отображении увеличивается в $\frac{R}{r}$ раз; поэтому всякая окружность при отображении переходит в окружность, а круг радиуса $\delta$ — в круг радиуса $\varepsilon = \frac{R}{r}\delta$. Значит, по любому заданному $\varepsilon > 0$ на-

шлось соответствующее ему $\delta = \frac{r}{R}\varepsilon$, и отображение непрерывно.

Пример 3. Пусть $K$ — круг радиуса $R$ с центром в точке $O$. Рассмотрим радиальную проекцию круга $K$ из центра на его граничную окружность $C$. Она определяется так: если $x$ — точка круга, отличная от его центра, то $f(x)$ есть точка пересечения луча, идущего из центра $O$ через точку $x$, с окружностью $C$ (рис. 17). Проекция точки $O$ этим не определяется, но мы дополнительно предположим, что центр проецируется, например, в самую высокую точку $A$ окружности $C$. Покажем, что радиальная проекция разрывна в центре круга и непрерывна в любой другой его точке. Возьмем $\varepsilon$-окрестность точки $A = f(O)$ на окружности $C$ настолько малой, чтобы она не совпадала со всей окружностью; для этого достаточно взять, например, $\varepsilon < 2R$. Тогда для такого числа $\varepsilon$ не существует соответствующего ему числа $\delta$: какую бы малую $\delta$-окрестность точки $O$ мы ни брали, точки из этой окрестности при отображении разбегаются во все стороны, и поэтому их образы не лежат в выбранной $\varepsilon$-окрестности точки $O$. Итак, в центре круга отображение разрывно.

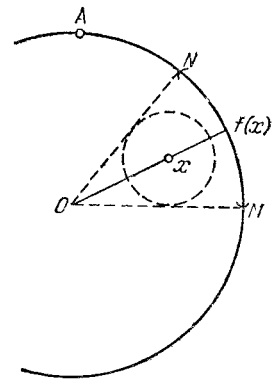


Рис. 17

Пусть $x$ — точка круга, отличная от центра (см. рис. 17), $f(x)$ — ее образ и дуга $MN$ (с исключенными концами) — $\varepsilon$-окрестность точки $f(x)$. Тогда соответствующая $\delta$-окрестность точки $x$ легко находится геометрически: для этого надо взять наибольший круг с центром в точке $x$, лежащий в круговом секторе, который опирается на дугу $MN$. Радиус этого круга равен $\delta$. Можно вывести формулу, выражающую зависимость числа $\delta$ от числа $\varepsilon$ (см. задачу 14).

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *взаимно однозначным*, если оно переводит различные точки множества $X$ в различные точки множества $Y$, или, как говорят, если оно не склеивает точки $X$. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *наложением*, если каждая точка множе-

ства $Y$ является образом какой-то точки (или каких-то точек) множества $X$. Таким образом, при наложении множество $X$ отображается на все множество $Y$, а не на его часть. Иногда о наложении говорят просто, что оно является отображением «на».

Для взаимно однозначного наложения $f\colon X \to Y$ можно определить *обратное* отображение $f^{-1}\colon Y \to X$, которое каждой точке $y$ из $Y$ ставит в соответствие точку $x$ из $X$, переходящую в $y$ при отображении $f$.

Взаимно однозначное наложение $f\colon X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно само непрерывно и обратное отображение $f^{-1}$ тоже непрерывно. Сами множества $X$ и $Y$ в этом случае называются *гомеоморфными*. Те свойства множеств, которые не изменяются при гомеоморфизмах, называются *топологическими* свойствами. Их изучением занимается наука *топология*.

Из рассмотренного выше примера 2 можно заключить (как именно?), что любые два круга гомеоморфны между собой. Можно проверить, что круг гомеоморфен квадрату, треугольнику, любому выпуклому многоугольнику. Гомеоморфны между собой также границы этих фигур (окружность и контур квадрата или треугольника).

Говорят, что множество $X$ *обладает свойством неподвижной точки*, если каждое непрерывное отображение $f\colon X \to X$ этого множества в себя имеет неподвижную точку. Легко видеть, что это свойство является топологическим, т. е. если его имеет какое-то множество $X$, то им обладает и всякое множество $Y$, гомеоморфное $X$. Проверим это. Пусть $g\colon X \to Y$ — гомеоморфизм и $f\colon Y \to Y$ — любое непрерывное отображение. Рассмотрим отображение $\varphi = g^{-1}fg$ множества $X$ в себя. Это отображение (называемое *композицией* трех отображений $g$, $f$ и $g^{-1}$) определяется так: сначала к точке $x$ из $X$ применяется отображение $g$, тогда получается точка $y = g(x)$ из $Y$; затем к $y$ применяется $f$ и получается точка $f(y) = fg(x)$ из $Y$; наконец, применяется $g^{-1}$ и получается точка $g^{-1}fg(x)$ из $X$. Можно проверить, что отображение $\varphi$ множества $X$ в себя непрерывно. Поэтому существует неподвижная точка $x_0$ в $X$. Обозначим через $y_0$ образ этой точки при гомеоморфизме $g$: $y_0 = g(x_0)$. Тогда имеем

$$\varphi(x_0) = g^{-1}fg(x_0) = x_0.$$

Применяя к обеим частям этого равенства отображение $g$, получаем

$$gg^{-1}fg(x_0) = g(x_0),$$

или

$$fg(x_0) = g(x_0). \tag{5.1}$$

Так как имеем $g(x_0) = y_0$, то равенство (5.1) дает $f(y_0) = y_0$, т. е. точка $y_0$ неподвижна.

Доказанное утверждение очень важно, так как позволяет доказывать свойство неподвижной точки только для одного представителя целого класса гомеоморфных между собой множеств. Так, например, в § 8 это свойство будет доказано для квадрата, а тем самым — для круга, треугольника и всякого выпуклого многоугольника на плоскости.

### ЗАДАЧИ

13. Пусть $X$ и $Y$ — множества (для определенности — на плоскости), $f$ — отображение $X$ в $Y$. Что можно сказать об этом отображении, если:

а) для любого числа $\delta > 0$ и любого числа $\varepsilon > 0$ образ каждой точки из $\delta$-окрестности некоторой точки $x_0$ лежит в $\varepsilon$-окрестности точки $y_0 = f(x_0)$;

б) для любого числа $\delta > 0$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что образ каждой точки из $\delta$-окрестности точки $x_0$ лежит в $\varepsilon$-окрестности точки $y_0 = f(x_0)$?

14. Доказать непрерывность радиальной проекции круга на его граничную окружность в любой точке, отличной от центра. Иначе говоря, найти формулу, выражающую зависимость числа $\delta$ от $\varepsilon$.

15. Говорят, что *отрезок* $[a, b]$ *не вырождается*, если $a \neq b$. Докажите, что все невырождающиеся отрезки гомеоморфны между собой.

16. Докажите, что композиция двух (или трех) непрерывных отображений есть непрерывное отображение.

## § 6. КОМПАКТНОСТЬ

Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ — последовательность точек, лежащих на прямой, на плоскости или в пространстве. Эту последовательность мы будем короче обозначать так: $\{x_n\}$. Отдельный член последовательности с номером $n$ обозначим $x_n$. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится к точке* $x_0$, когда номер $n$ стремится к бесконечности, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $m$, что для всех номеров $n > m$ расстояние между точками $x_0$ и $x_n$ меньше $\varepsilon$. Обозначают это так: $x_n \to x_0$. Иначе говоря, сходимость $x_n \to x_0$ означает, что

какую бы $\varepsilon$-окрестность точки $x_0$ мы ни взяли, в ней лежат все точки последовательности, начиная с некоторого номера. Например, последовательность точек $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ на прямой сходится к нулю, так как все члены последовательности с нечетными номерами равны нулю, а член с четным номером $n = 2k$ имеет вид $x_n = \frac{2}{2k} = \frac{1}{k}$. Если мы потребуем, чтобы было $\frac{1}{k} < \varepsilon$, то получаем $k > \frac{1}{\varepsilon}$, откуда $\frac{n}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$ или $n > \frac{2}{\varepsilon}$. Итак, если взять номер $n$ бо́льшим чем $m = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$ (где квадратные скобки обозначают целую часть числа $\frac{2}{\varepsilon}$), то точка $x_n$ с таким номером $n$ лежит в $\varepsilon$-окрестности нуля. С другой стороны, последовательность

$$\left\{1,\ 1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{2k-1},\ 1-\frac{1}{2k},\ \ldots\right\}$$

ни к чему не сходится, так как из нее можно выделить две подпоследовательности, сходящиеся к разным точкам; именно, подпоследовательность

$$\left\{1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \ldots,\ \frac{1}{2k-1},\ \ldots\right\}$$

сходится к нулю, а подпоследовательность

$$\left\{1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{4},\ 1-\frac{1}{6},\ \ldots,\ 1-\frac{1}{2k},\ \ldots\right\}$$

сходится к единице.

С помощью последовательностей определяется понятие компактности — одно из наиболее важных в топологии.

Множество $X$ называется *компактным* (или просто *компактом*), если из любой последовательности $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ точек этого множества можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0$ этого же множества.

Например, всякое конечное множество компактно, так как любая последовательность его точек содержит стационарную подпоследовательность, у которой все точки одинаковы; а такая подпоследовательность, очевидно, сходится.

Мы докажем, что отрезок и квадрат компактны. Этим свойством обладают также все выпуклые многоугольники, а также круг, окружность, сфера.

Рассмотрим сначала два примера некомпактных множеств. Это числовая прямая $\mathbb{R}$ и ее интервал $(0, 1)$. Действительно, из последовательности натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ на $\mathbb{R}$ нельзя выделить никакой сходящейся подпоследовательности, откуда следует, что числовая прямая $\mathbb{R}$ некомпактна. С другой стороны, последовательность точек $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, лежащая на интервале $(0, 1)$, сходится к нулю, но так как нуль не входит в этот интервал, то условие компактности опять не выполняется.

Доказательство компактности отрезка основано на принципе стягивающихся отрезков. Этот принцип (или какое-нибудь эквивалентное ему утверждение) принимается обычно за одну из аксиом числовой прямой.

Принцип стягивающихся отрезков. *Если последовательность отрезков $\{I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots\}$ такова, что каждый из них лежит в предыдущем и длины их стремятся к нулю, когда n стремится к бесконечности, то все эти отрезки имеют единственную общую точку.*

Докажем компактность отрезка $I_0 = [a, b]$. Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ — произвольная последовательность точек, лежащая на $[a, b]$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Тогда хотя бы одна его половина содержит бесконечно много (различных или одинаковых) точек последовательности $\{x_n\}$. Обозначим эту половину через $I_1$ и выберем в ней точку $x_{n_1}$ последовательности $\{x_n\}$. Отрезок $I_1$ снова разделим пополам и обозначим через $I_2$ ту его половину, которая содержит бесконечно много точек последовательности $\{x_n\}$. Выберем в отрезке $I_2$ точку $x_{n_2}$ из последовательности $\{x_n\}$. Продолжая так дальше, получим последовательность вложенных друг в друга отрезков $\{I_0 = [a, b], I_1, \ldots, I_k, \ldots\}$ таких, что длина отрезка $I_k$ равна $\frac{b-a}{2^k}$ и отрезок $I_k$ содержит точку $x_{n_k}$ последовательности $\{x_n\}$. Ясно, что длины отрезков $I_k$ стремятся к нулю. Согласно принципу стягивающихся отрезков, существует единственная точка $x_0$, принадлежащая всем отрезкам $I_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и, в частности, отрезку $[a, b]$. Докажем, что подпоследовательность точек $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots\}$, выбранная из последовательности $\{x_n\}$, сходится к точке $x_0$. Для этого возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда существует такой номер $m$, что длина отрезка $I_m$, равная $\frac{b-a}{2^m}$, будет мень-

ше чем $\varepsilon$. Так как, кроме того, отрезок $I_m$ содержит точку $x_0$, то весь он лежит в $\varepsilon$-окрестности этой точки. Это же заключение справедливо для всех отрезков $I_k$ с номерами $k \geqslant m$. Итак, $\varepsilon$-окрестность точки $x_0$ содержит все точки последовательности $\{x_{n_k}\}$, начиная с номера $n_m$. Поэтому последовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится к точке $x_0$, и компактность отрезка $I_0$ доказана.

Докажем компактность квадрата. Пусть $Q_0$ — квадрат, стороны которого параллельны осям координат $Ox$ и $Oy$ и длина стороны которого для определенности равна 1. Пусть $\{p_n\}$ — произвольная последовательность точек из $Q_0$. Разобьем $Q_0$ на четыре равных квадрата прямыми, параллельными его сторонам. Пусть $Q_1$ — один

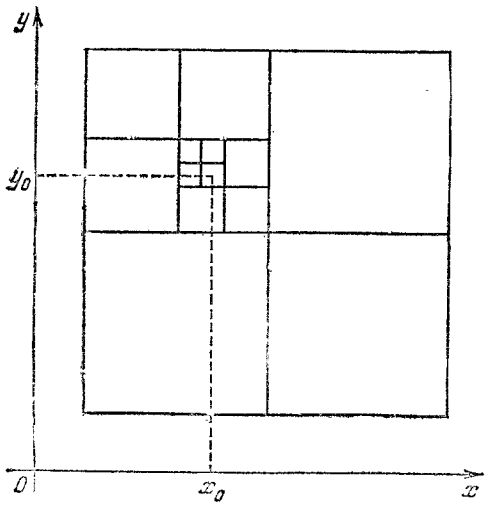



Рис. 18

из этих четырех квадратов, а именно тот, который содержит бесконечно много (различных или одинаковых) точек последовательности $\{p_n\}$. Выберем одну такую точку и обозначим ее $p_{n_1}$. Далее, разобьем квадрат $Q_1$ таким же способом на четыре равных квадрата и обозначим через $Q_2$ тот из них, который содержит бесконечно много точек последовательности $\{p_n\}$. Выберем одну такую точку и обозначим ее $p_{n_2}$. Продолжая так дальше, получим последовательность вложенных друг в друга квадратов $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_k, \ldots\}$ таких, что длина сторо-

ны квадрата $Q_k$ равна $\frac{1}{2^k}$ и $Q_k$ содержит точку $p_{n_k}$ из последовательности $\{p_n\}$ (рис. 18). Тогда проекции этих квадратов на ось $Ox$ образуют последовательность стягивающихся отрезков $\{I_0^x, I_1^x, \ldots, I_k^x, \ldots\}$ на этой оси. Пусть $x_0$ — единственная общая точка всех этих отрезков. Далее, пусть $\{I_0^y, I_1^y, \ldots, I_k^y, \ldots\}$ — последовательность стягивающихся отрезков на оси $Oy$, которые являются проекциями квадратов $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_k, \ldots\}$ на эту ось, и $y_0$ — единственная общая точка всех этих отрезков. Предоставляем читателю самому проверить, что подпоследовательность $\{p_{n_k}\}$ сходится к точке квадрата $Q_0$, имеющей координаты $(x_0, y_0)$. Этим будет завершено доказательство компактности квадрата $Q_0$.

ЗАДАЧА

17. Докажите, что функция $f$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена сверху и снизу, т. е. существуют такие числа $m$ и $M$, что $m \leqslant f(x) \leqslant M$ для любой точки $x$ из отрезка.

## § 7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ БРАУЭРА ДЛЯ ОТРЕЗКА. ТЕОРЕМА О ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ. ПРИЛОЖЕНИЯ

Теорема Брауэра для отрезка уже сформулирована в § 1. Теперь будет дано ее доказательство с использованием точного понятия непрерывности «на языке ε-δ».

Основная идея доказательства состоит в том, что мы разбиваем отрезок на части и находим малый отрезок, концы которого при отображении смещаются в разных направлениях. Эти смещения должны быть непременно малыми, так как в противном случае отображение имело бы разрыв. Иначе говоря, найденный маленький отрезок можно приближенно рассматривать как неподвижную «точку». Затем настоящая неподвижная точка «находится» точно с помощью принципа стягивающихся отрезков.

Итак, пусть имеется непрерывное отображение $f$ отрезка $[a, b]$ в себя. Если какой-нибудь конец отрезка $[a, b]$ остается неподвижным при этом отображении, то теорема доказана. Поэтому будем считать, что оба конца смещаются, причем точка $a$ сместится, конечно, вправо, а точка $b$ — влево. Разделим отрезок $I_0 = [a, b]$ по-

полам точкой $c = \frac{a+b}{2}$. Если точка $c$ неподвижна, то теорема доказана. Пусть точка $c$ смещается либо влево, либо вправо. В том и другом случае одна из половин отрезка $I_0$ такова, что ее концы при отображении смещаются внутрь нее самой. Обозначим ее $I_1$. Повторим уже проделанный процесс, деля отрезок $I_1$ пополам. Тогда либо его середина неподвижна, либо найдется половина $I_2$ отрезка $I_1$, концы которой смещаются внутрь нее самой. Продолжая так дальше, мы либо через конечное число шагов найдем неподвижную точку отображения, либо получим бесконечную последовательность $\{I_0, I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots\}$ стягивающихся отрезков, у каждого из которых концы смещаются внутрь него.

Пусть $x_0$ — единственная общая точка всех этих отрезков. Докажем, что $f(x_0) = x_0$. Это сразу следует из соображений непрерывности. Более подробно: пусть, наоборот, точки $x_0$ и $y_0 = f(x_0)$ различны и для определенности пусть $y_0$ лежит правее, чем $x_0$. Отображение $f$ непрерывно в точке $x_0$. На языке ε-δ это значит, что для любой ε-окрестности точки $y_0$ найдется такая δ-окрестность точки $x_0$, что образы всех ее точек лежат в ε-окрестности точки $y_0$. Число $\varepsilon > 0$, равное радиусу ε-окрестности, находится в нашем распоряжении. Возьмем его настолько малым, чтобы упомянутые ε- и δ-окрестности не имели общих точек (рис. 19). Тогда все точки из

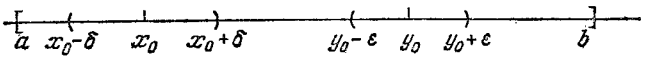



Рис. 19

δ-окрестности, переходя в ε-окрестность, смещаются вправо. Если теперь взять номер $n$ достаточно большим, то отрезок $I_n$ с таким номером целиком лежит в δ-окрестности точки $x_0$, и поэтому все его точки смещаются вправо. Это противоречит тому, что, как мы видели, левый конец отрезка $I_n$ смещается вправо, а правый — влево. Этим доказательство заканчивается.

Как было сказано в предисловии, нахождение корней уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$ можно свести к нахождению неподвижных точек отображения $F$, где $F(x) = \lambda f(x) + x$. Рассмотрим теперь этот вопрос подробнее и прежде всего докажем следующую теорему.

Теорема (о промежуточных значениях). *Если $f$ — непрерывная функция, заданная на отрезке*

$[a, b]$, *и такая, что* $f(a) < f(b)$, *и если число* $c$ *удовлетворяет неравенствам* $f(a) < c < f(b)$, *то на отрезке найдется такая точка* $x_0$, *что* $f(x_0) = c$.

Иначе говоря, непрерывная функция на отрезке принимает все промежуточные значения.

Эту теорему мы докажем сначала для частного случая, когда $c = 0$ и, следовательно, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Идея доказательства состоит в том, что, имея на отрезке $[a, b]$ функцию $f(x)$, мы строим на этом же отрезке новую непрерывную функцию $F(x) = \lambda f(x) + x$, где параметр $\lambda \neq 0$ выбирается так, чтобы функция $F(x)$ отображала отрезок $[a, b]$ в себя. Если проделать такой выбор,

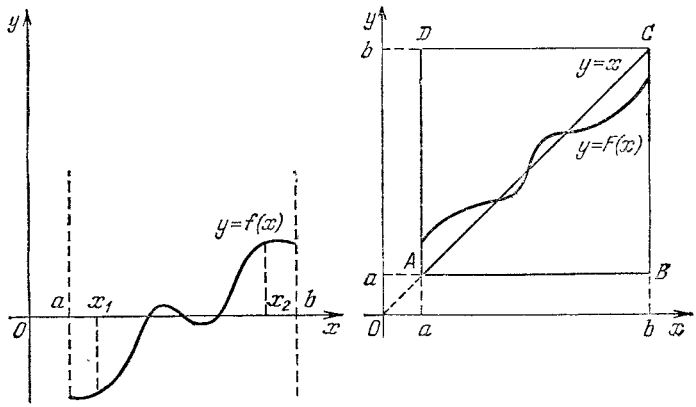



Рис. 20

то функция $F(x)$ имеет на этом отрезке неподвижную точку $x_0$; тогда $\lambda f(x_0) + x_0 = x_0$, и поэтому $f(x_0) = 0$. Выбор параметра $\lambda$ иллюстрируется рис. 20: чтобы функция $F(x)$ отображала отрезок $[a, b]$ в себя, ее график не должен выходить за пределы квадрата $ABCD$, поэтому число $\lambda$ должно быть достаточно малым по абсолютной величине, иначе говоря, график функции $f(x)$ должен быть подвергнут сжатию; кроме того, следует взять $\lambda < 0$, иначе при любом сжатии график функции $F(x)$ выйдет за пределы квадрата.

Итак, все дело сводится к точному определению числа $\lambda$. Мы сделаем это следующим образом. Непрерывная функция $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, т. е. существуют такие числа $m$ и $M$, что $m \leqslant f(x) \leqslant M$ для любой точки $x$

из этого отрезка (см. задачу 17), причем, очевидно, в нашем случае $m < 0$, $M > 0$. Далее, так как $f(a) < 0$, то ввиду непрерывности функции $f(x)$ имеем $f(x) < 0$ для всех точек $x$, достаточно близких к точке $a$. Мы выберем такую точку $x_1$, чтобы было $f(x) < 0$, если $a \leqslant x \leqslant x_1$. Аналогично, выберем точку $x_2$ так, что $f(x) > 0$, если $x_2 \leqslant x \leqslant b$ (см. рис. 20). Теперь положим

$$\lambda = \max\left\{\frac{a - x_1}{M}, \frac{b - x_2}{m}\right\},$$

т. е. возьмем в качестве $\lambda$ не меньшее (иными словами, не большее по абсолютной величине) из двух отрицательных чисел $\frac{a - x_1}{M}$ и $\frac{b - x_2}{m}$.

Покажем, что при таком $\lambda$ будет $F(x) \geqslant a$, если $a \leqslant x \leqslant b$. Пусть сначала точка $x$ такая, что $f(x) \geqslant 0$. Возьмем неравенство $\lambda \geqslant \frac{a - x_1}{M}$ и умножим обе его части на $f(x)$. Тогда $\lambda f(x) \geqslant \frac{a - x_1}{M} f(x)$, или, используя неравенство $-f(x) \geqslant -M$, получаем

$$F(x) = \lambda f(x) + x \geqslant \frac{a - x_1}{M} f(x) + x =$$

$$= \frac{a - x_1}{(-M)}(-f(x)) + x \geqslant \frac{a - x_1}{(-M)}(-M) + x = a - x_1 + x.$$

Так как $f(x) \geqslant 0$, то, ввиду выбора точки $x_1$, имеем $x > x_1$, и поэтому $F(x) \geqslant a - x_1 + x > a$. Пусть теперь точка $x$ такая, что $f(x) < 0$. Тогда $\lambda f(x) > 0$, и поэтому $F(x) = \lambda f(x) + x > x \geqslant a$.

Покажем, что если $a \leqslant x \leqslant b$, то $F(x) \leqslant b$. Пусть сначала точка $x$ такая, что $f(x) \geqslant 0$. Тогда $\lambda f(x) \leqslant 0$, и поэтому $F(x) = \lambda f(x) + x \leqslant x \leqslant b$. Пусть теперь точка $x$ такая, что $f(x) < 0$. Возьмем неравенство $\lambda \geqslant \frac{b - x_2}{m}$ и умножим обе его части на $f(x)$. Тогда $\lambda f(x) \leqslant \frac{b - x_2}{m} f(x)$, или, используя неравенство $-f(x) \leqslant -m$, получаем

$$F(x) = \lambda f(x) + x \leqslant \frac{b - x_2}{m} f(x) + x = \frac{b - x_2}{(-m)}(-f(x)) + x \leqslant$$

$$\leqslant \frac{b - x_2}{(-m)}(-m) + x = b - x_2 + x.$$

Так как $f(x) < 0$, то, ввиду выбора точки $x_2$, имеем $x < x_2$, и поэтому $F(x) \leqslant b - x_2 + x < b$.

Итак, непрерывная функция $F(x)$ отображает отрезок $[a, b]$ в себя, поэтому у нее имеется неподвижная точка $x_0$, для которой, следовательно, $f(x_0) = 0$.

В случае, когда $c \neq 0$, все рассуждения сохраняются, если в них заменить функцию $f(x)$ на $f(x) - c$. В частности, надо положить $F(x) = \lambda[f(x) - c] + x$. Детальное проведение доказательства предоставляется самому читателю.

Теорема о промежуточных значениях, конечно, справедлива и в том случае, когда $f(a) > f(b)$, а число $c$ удовлетворяет неравенствам $f(a) > c > f(b)$. И здесь читатель пусть попробует сам провести доказательство.

Наконец, заметим, что теорема о неподвижной точке следует из теоремы о промежуточных значениях (задача 18).

## ЗАДАЧИ

**18.** Выведите теорему о неподвижной точке для отрезка из теоремы о промежуточных значениях.

**19.** Дайте доказательство теоремы о промежуточных значениях, не зависящее от теоремы о неподвижной точке.

**20.** Пусть $f$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, отображающая каждый конец отрезка в себя, т. е. $f(a) = a$, $f(b) = b$. Пусть $g$ — любая непрерывная функция, отображающая отрезок $[a, b]$ в себя. Докажите, что тогда на этом отрезке найдется такая точка $x_0$, что $f(x_0) = g(x_0)$. Сохранится ли это утверждение в силе, если $g$ — произвольная непрерывная функция на $[a, b]$?

**21.** Докажите, что непрерывное отображение $f$ отрезка $A = [a_1, a_2]$ на (весь) отрезок $B = [b_1, b_2]$, содержащий в себе отрезок $A$, имеет неподвижную точку. Верно ли это, если образ $f(A)$ отрезка $A$ не совпадает с $B$, а только лежит в нем?

**22.** Пусть $f$ — непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ на себя. Докажите, что тогда отображение $g = f^2$ (композиция отображения $f$ с самим собой) имеет по крайней мере две неподвижных точки. Верно ли это, если $f$ отображает отрезок $[a, b]$ в себя, но не на себя?

**23.** Функция $f$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *неубывающей*, если из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, и *невозрастающей*, если из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Докажите, что неубывающая (а также невозрастающая) функция, отображающая отрезок в себя, имеет на нем неподвижную точку, даже если она не обязательно непрерывна.

**24.** Докажите, что кубическое уравнение

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

где $a_0 \neq 0$, а остальные коэффициенты — любые действительные числа, имеет по крайней мере один действительный корень. Очевидно, что если $a_3 = 0$, то число $x = 0$ является корнем этого уравнения. Можно ли что-нибудь сказать о наличии у него положительного или отрицательного корня, если $a_3 \neq 0$?

Укажем некоторые следствия теоремы о промежуточных значениях. Рассмотрим непрерывные отображения окружности $C$ в числовую прямую $\mathbb{R}$. Положение точки $x$ на окружности обычно описывается при помощи угла $\alpha$, образованного радиусом, проведенным из центра $C$, с радиусом, направленным вправо от центра (рис. 21). Угол $\alpha$ называется *угловой координатой* точки $x$. Его положительное направление обычно отсчитывается против часовой стрелки. Пока мы предполагаем, что $\alpha$ изменяется в пределах от 0 до $2\pi$ (в радианном измерении). Две точки $x$ и $x^*$, лежащие на окружности, называются *антиподами*, если их угловые координаты отличаются на $\pi$ (или, что то же, если соединяющая их хорда является диаметром окружности).

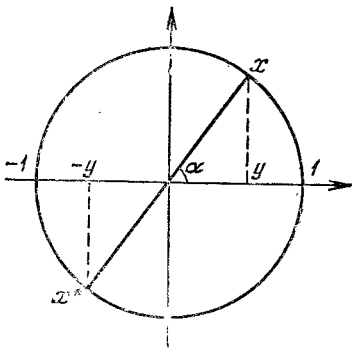


Рис. 21

Теорема Борсука—Улама для окружности*). *Пусть* $f\colon C \to \mathbb{R}$ — *непрерывная функция на окружности. Тогда существует пара точек-антиподов* $x$ *и* $x^*$ *такая, что* $f(x) = f(x^*)$.

Доказательство. Пусть $C$ — окружность единичного радиуса с центром в начале координат и $\alpha$ — угловая координата ее точки $x$ (см. рис. 21). Определим на отрезке $I = [-1, 1]$ непрерывную функцию $g(y)$ следующим образом. Если $y$ — точка на $I$, то пусть $x$ — точка пересечения перпендикуляра к горизонтальной оси, восставленного из точки $y$, с верхней полуокружностью и $x^*$ — антипод точки $x$. Положим

$$g(y) = f(x) - f(x^*) = f(\alpha) - f(\alpha \pm \pi).$$

На концах отрезка $I$ значения функции $g(y)$ равны $g(1) = f(0) - f(\pi)$ и $g(-1) = f(\pi) - f(0)$, т. е. всегда $g(1) = -g(-1)$. Если $g(1) = 0$, то все доказано. В противном случае по теореме о промежуточных значениях на отрезке $I$ найдется такая точка $y$, что $g(y) = 0$. Если теперь $x$ — точка окружности, соответствующая точке $y$, то $f(x) = f(x^*)$.

*) К. Борсук (1905—1982) — польский математик, С. Улам (1909—1984) — американский математик польского происхождения.

Следствие. *В данный момент времени на любой большой окружности земного шара (например, на экваторе) найдется пара антиподов, в которых температура воздуха одинакова.*

Первая теорема о блинах. *Если $A$ и $B$ — ограниченные фигуры на плоскости, то существует прямая, которая делит каждую из этих фигур на две части равной площади.*

В этой теореме предполагается, что каждая фигура имеет площадь (что может быть не всегда, а именно если фигура имеет очень сложную, замысловатую форму). Понятно, почему теореме присвоено такое название: она утверждает, что два блина, лежащие на одной тарелке, можно разрезать точно пополам одним взмахом ножа.

Для доказательства заключим обе фигуры внутрь окружности $C$ (рис. 22) (ограниченность фигур как раз и означает возможность этого). Для любой точки $x$, лежащей на окружности $C$, рассмотрим ее диаметр $D_x$, проходящий через $x$. Пусть $L_t$ — перпендикуляр к $D_x$, проходящий через точку на $D_x$, расстояние которой от $x$ равно $t$ ($0 \leqslant t \leqslant d$, здесь $d$ — диаметр окружности). Пусть $f_1(t)$ — площадь части фигуры $A$, лежащей с той же стороны от $L_t$, что и $x$, а $f_2(t)$ — площадь другой части. Функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ заданы на отрезке $[0, d]$ и обе непрерывны там, так же как их разность $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$. Ясно, что $f(0) = -f(d)$, и поэтому на отрезке $[0, d]$ найдется такая точка $t$, что $f(t) = 0$, или $f_1(t) = f_2(t)$. Таким образом, прямая $L_t$, проходящая через эту точку, делит $A$ пополам. Эта же прямая делит фигуру $B$ на какие-то две части. Обозначим через $g_1(x)$ площадь той части $B$, которая лежит ближе к точке $x$, и через $g_2(x)$ — площадь другой части. Рассмотрим функцию $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$. Она задана на окружности $C$ и непрерывна там. Когда точка $x$, непрерывно перемещаясь по $C$, перейдет в свой антипод $x^*$, упомянутые части фигуры $B$ поменяются местами. Поэтому $g(x) = -g(x^*)$ для всех точек $x$ на окружности $C$. По теореме Борсука — Улама найдется такая точка $x$,

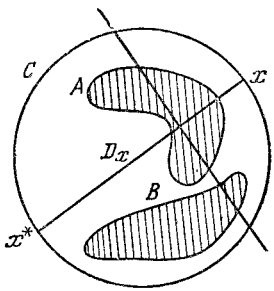


Рис. 22

где $g(x) = g(x^*)$. Два равенства $g(x) = -g(x^*)$ и $g(x) = g(x^*)$ дают $g(x) = 0$, т. е. на окружности имеется точка $x$, для которой прямая $L_t$ делит обе фигуры пополам.

Вторая теорема о блинах. *Если $A$ — ограниченная фигура на плоскости, то существуют две взаимно перпендикулярные прямые, разделяющие $A$ на четыре части одинаковой площади.*

Как и раньше, заключим фигуру $A$ внутрь окружности $C$. Для любой точки $x$ на $C$ обозначим через $D_x$ диаметр, проходящий через точку $x$ и ее антипод $x^*$. Далее, пусть $L_x$ — прямая, перпендикулярная $D_x$ и делящая $A$ пополам, а $M_x$ — прямая, тоже делящая $A$ пополам, но параллельная $D_x$ (существование таких прямых уже доказано). Эти две прямые делят $A$ на четыре части, которые мы, двигаясь против часовой стрелки, обозначим по порядку $A_1(x)$, $A_2(x)$, $A_3(x)$ и $A_4(x)$ (рис. 23).

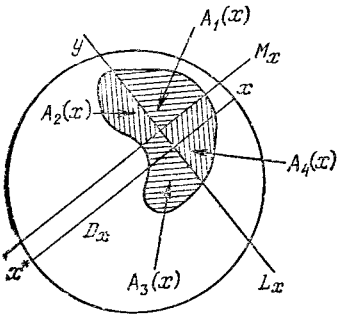


Рис. 23

Пусть $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ и $S_4(x)$ — соответственно площади этих частей. Ясно, что

$$S_1(x) + S_2(x) = S_3(x) + S_4(x)$$

и

$$S_4(x) + S_1(x) = S_2(x) + S_3(x),$$

откуда имеем $S_1(x) = S_3(x)$, $S_2(x) = S_4(x)$.

Эти равенства получены при любом, но фиксированном положении точки $x$. Пусть теперь эта точка, двигаясь непрерывно по окружности $C$ против часовой стрелки, пройдет дугу в $\frac{\pi}{2}$ радиан и займет положение $y$. Тогда часть $A_1(x)$ фигуры $A$ непрерывно перейдет в $A_2(x)$, ..., часть $A_4(x)$ перейдет в $A_1(x)$. Поэтому $S_1(y) = S_2(x)$ и $S_2(y) = S_3(x)$.

Положим $f(x) = S_1(x) - S_2(x)$. Тогда

$$f(y) = S_1(y) - S_2(y) = S_2(x) - S_3(x) = \\ = S_2(x) - S_1(x) = -f(x).$$

Значит, когда $x$ пробегает дугу в $\frac{\pi}{2}$ радиан, непрерывная функция $f$ меняет знак. Отсюда обычным способом

заключаем, что в некоторой точке $x$ этой дуги $f(x) = 0$. Такая точка дает нужное разбиение фигуры $A$. Это завершает доказательство.

Заметим, что в теоремах о блинах мы не проверяли непрерывность встречающихся там функций. Доказательства этой непрерывности читатель найдет в § 11 книги [5].

Мы закончим этот параграф одной задачей из механики. Пусть поезд движется по прямолинейному участку пути между двумя станциями. В одном из вагонов к полу шарнирно прикреплен стержень. Предположим, что ось шарнира параллельна осям вагона. Стержень предоставлен самому себе и может вращаться, занимая любое положение между двумя крайними лежачими положениями: вперед по ходу поезда и назад. Вопрос состоит в следующем: можно ли придать стержню такое начальное положение, чтобы за все время движения поезда он не упал, не прикоснулся к полу вагона? Мы увидим, что ответ на этот вопрос утвердительный. При этом нам не потребуется точного знания законов динамики, учета всех сил, действующих на стержень. Достаточно будет сделать лишь одно предположение физического характера: конечные положения стержня непрерывно зависят от начальных. В частности, если стержень лежал на полу с самого начала, то он и дальше останется в этом лежачем положении.

Состояние стержня в каждый момент времени определяется одной координатой: углом $\alpha$, который он образует с полом (рис. 24). Углам $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$ соответствуют два взаимно противоположных (лежачих) положения. Нужное утверждение будет доказано от противного: допустим, что всегда, т. е. при любом начальном положении, стержень упадет или в одну, или в другую сторону, так что $\alpha$ примет в конце концов значение 0 или $\pi$. Зададим на отрезке $[0, \pi]$ функцию $f(\alpha)$, ставя в соответствие каждому начальному положению стержня его конечное положение. Иначе говоря, если, например, угол $\alpha$ вначале имел значение $\frac{\pi}{6}$ и стержень упал вправо, то полагаем $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$. Согласно нашим предпо-

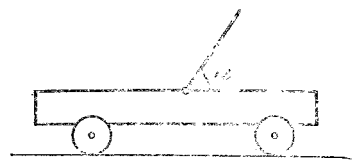


Рис. 24

ложениям, функция $f(\alpha)$ непрерывна на отрезке $[0, \pi]$ и принимает на его концах следующие значения: $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi$. Кроме того, каждое значение этой функции равно либо 0, либо $\pi$. Ясно, что существование такой функции противоречит теореме о промежуточных значениях, что и доказывает наше утверждение.

Приведенное доказательство является «чистым доказательством существования»: оно не дает никаких указаний на то, как найти искомое начальное положение стержня. Аналогичное замечание относится и к рассмотренным выше задачам о разрезании блинов.

### ЗАДАЧИ

**25.** Докажите, что окружность не гомеоморфна прямой или какому-либо ее подмножеству.

**26.** Найдите ошибку в следующем рассуждении. Температура воздуха в любом месте, например в городе Свердловске, меняется со временем непрерывно. Проследим за ее изменением за один час, в течение которого минутная стрелка сделает полный оборот по циферблату часов. По теореме Борсука — Улама найдутся два момента времени, отстоящие один от другого на полчаса, в которые температура одинакова. Мы можем считать, что стрелка часов движется с любой скоростью, а моменты начала и конца отсчета выбирать произвольно. Поэтому температура воздуха одинакова в любые два момента времени, т. е. постоянна.

**27.** Очевидно, что если один блин имеет форму круга, а другой — квадрата, то прямая, делящая оба блина пополам, проходит через их центры. Верно ли это для любых двух блинов, имеющих форму правильных многоугольников?

**28.** Докажите, что вокруг всякой замкнутой кривой, лежащей на плоскости, можно описать квадрат.

## § 8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ БРАУЭРА ДЛЯ КВАДРАТА

Мы дадим два доказательства этой теоремы. Каждое из них рассчитано на «своего» читателя. Для тех, кто желает познакомиться только с основными идеями, не вдаваясь в подробности, дается наглядное, но не «строгое» доказательство на шахматной доске, заимствованное из книги [6, с. 141]. Для читателей, которых «приблизительные» рассуждения не удовлетворят, доказательство формализуется с использованием «языка $\varepsilon$-$\delta$». Впрочем, основная идея в обоих случаях одна и та же: как и раньше, в одномерном случае, мы ищем маленький квадрат (вместо отрезка), в котором разные точки смещаются в разных направлениях, и тогда, чтобы сохранить непрерывность, эти смещения следует считать

малыми или совсем исчезающими, что и говорит о наличии неподвижной точки.

Итак, пусть имеется непрерывное отображение квадрата (шахматной доски) в себя. Для каждой точки $p$ квадрата обозначим через $q$ ее образ при этом отображении. Назовем поле доски *красным*, если для каждой его точки $p$ точка $q$ лежит ближе к правому краю доски, чем сама точка $p$; если для всех точек $p$ поля их образы $q$ лежат ближе к левому краю доски, чем сами точки $p$, то такое поле назовем *синим*; *желтыми* будем называть поля, которые не являются ни красными, ни синими. Если точка лежит на правом крае доски, то ее образ не может быть ближе к этому краю, чем сама точка; поэтому все поля крайней правой вертикали — не красные; аналогично, все поля крайней левой вертикали — не синие. Далее, точка не может приблизиться одновременно к левому и правому краю; поэтому красные и синие поля не могут быть соседними (соседние поля имеют по крайней мере одну общую точку). Значит, если запретить королю ходить по желтым полям, то он не сможет пройти от левого края доски к правому, а тогда ладья пройдет от нижнего края доски к верхнему, двигаясь только по желтым полям (см. задачу 7). Таким образом, от нижнего края доски к верхнему можно провести линию, которая проходит только по желтым полям. Такой линией является, например, ломаная, проходящая через центры тех полей, по которым прошла ладья.

Возьмем такую линию и из каждой ее точки $p$ проведем стрелку (вектор смещения) в точку $q$. В начальной точке этой линии, лежащей на нижнем крае доски, стрелка $(p, q)$ не может быть направлена вниз (хотя бы и с отклонением влево или вправо), а идет, вообще говоря, вверх. В конечной точке линии, расположенной на верхнем крае доски, стрелка-вектор $(p, q)$ идет, вообще говоря, вниз. Так как направление стрелки по ходу движения меняется непрерывно, то на линии найдется такая точка $p_1$, в которой стрелка $(p_1, q_1)$ направлена горизонтально. Но из определения желтого поля вытекает, что в поле, содержащем точку $p_1$, найдется такая точка $p_2$, где стрелка $(p_2, q_2)$ направлена вертикально. Если поле мало, то подобный скачок в перемене направления стрелки возможен лишь при условии, что сами стрелки малы для всех точек $p$ в этом поле.

Если теперь разделить доску на $n^2$ полей и устремить число $n$ к бесконечности, то мы получим в пределе точку $p_0$, в которой стрелка $(p_0, q_0)$ исчезает, т. е. неподвижную точку.

Переходим к строгому доказательству. Рассмотрим квадрат $Q = A_1A_2A_3A_4$ и докажем, что всякое его непрерывное отображение $f$ в себя имеет неподвижную точку.

Пусть имеется какое-нибудь разбиение квадрата $Q$ на малые квадраты-грани прямыми, параллельными его сторонам (рис. 25). Если какая-то вершина разбиения остается неподвижной при отображении $f$, то теорема доказана. Поэтому будем считать, что все вершины перемещаются. Поставим в соответствие каждой вершине разбиения в качестве отметки одно из чисел 1, 2, 3, 4. Эти отметки будут даны в зависимости от направления, в котором смещаются вершины, и еще так, чтобы были выполнены условия леммы 4 (см. с. 15). Более точно, пусть $p$ — вершина разбиения, $q = f(p)$ — ее образ при отображении $f$, $(p, q)$ — вектор смещения и $\varphi$ — угол, образованный этим вектором с положительным направлением горизонтальной оси. Припишем вершине разбиения $p$ отметку в соответствии со следующей табл. 1 (см. также рис. 26).

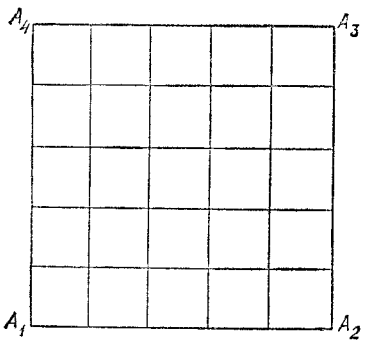


Рис. 25

В частности, если точка $p$ совпадает с вершиной $A_1$ квадрата $Q$, то угол $\varphi$ удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Если при этом выполняются строгие неравенства $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, то согласно таблице мы даем вершине $A_1$ отметку 1. Если же $\varphi = 0$ или $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то первая и третья строки таблицы показывают, что этой вершине можно приписать одну из трех отметок: 1, 2 или 4. Чтобы удовлетворить условиям леммы 4, мы выбираем из трех возможных отметок одну, а именно 1. Аналогич-

Таблица 1

| Угол | Отметка |
|---|---|
| $\varphi = 0$ | 1 или 4 |
| $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ | 1 |
| $\varphi = \frac{\pi}{2}$ | 1 или 2 |
| $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ | 2 |
| $\varphi = \pi$ | 2 или 3 |
| $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ | 3 |
| $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ | 3 или 4 |
| $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$ | 4 |

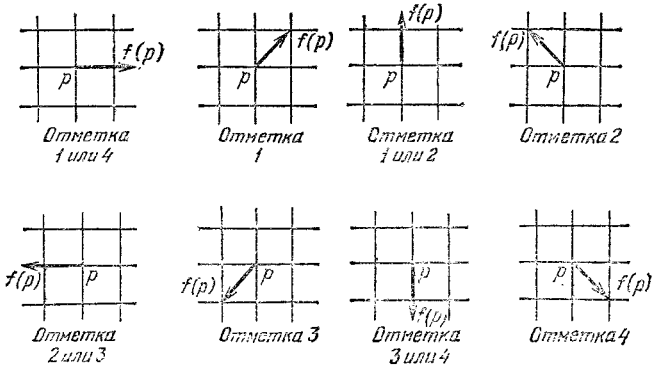



Рис. 26

но, вершина $A_2$ получает отметку 2, вершина $A_3$ — отметку 3, вершина $A_4$ — отметку 4.

Если точка $p$ лежит на стороне $A_1A_2$ квадрата $Q$ и не совпадает с ее концами, то тогда $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Если

при этом выполняются строгие неравенства $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ или $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, то в соответствии с таблицей точка $p$ получает отметку 1 или 2 соответственно. Если для этой точки $\varphi = 0$, то из двух возможных отметок 1 или 4 мы выбираем первую, чтобы опять удовлетворить условиям леммы 4. Аналогично поступаем в случаях, когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $\varphi = \pi$.

Такие же соображения применяются к точкам, лежащим на трех других сторонах квадрата. Наконец, точкам, лежащим внутри квадрата, отметки даются только согласно табл. 1, без оглядок на лемму 4.

Итак, полученная система отметок удовлетворяет условиям леммы 4. Заключаем из этой леммы, что у нашего разбиения имеется квадратная грань, несущая не менее трех различных отметок.

Рассмотрим теперь последовательность разбиений $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots\}$ квадрата $Q$. Разбиение $\tau_n$ с номером $n$ получается так: каждая сторона квадрата делится на $2^n$ равных частей, и через точки деления проводятся прямые, параллельные его сторонам. Ясно, что длина всех ребер разбиения $\tau_n$ стремится к нулю, когда номер $n$ стремится к бесконечности.

Предположим, что все вершины каждого разбиения $\tau_n$ сдвигаются при отображении $f$. Тогда в каждом разбиении найдется грань — маленький квадрат, имеющая не менее трех различных отметок. Выберем в разбиении $\tau_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такой квадрат $Q_n$ и пусть $x_n$, $y_n$, $z_n$, $u_n$ — его вершины.

Так как квадрат $Q$ компактен, то из последовательности точек $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке $p_0$ из $Q$. Как и раньше, предполагаем, что к этой точке сходится сама последовательность $\{x_n\}$. Тогда к этой же точке сходятся еще три последовательности: $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ и $\{u_n\}$. Такое заключение можно сделать потому, что длина стороны квадрата $Q_n$ стремится к нулю, когда номер $n$ стремится к бесконечности.

Докажем, что точка $p_0$ неподвижна. Пусть, наоборот, точки $p_0$ и $q_0 = f(p_0)$ различны. Рассмотрим два случая. Пусть сначала точка $q_0$ лежит строго выше, чем $p_0$, иначе говоря, пусть для точки $p_0$ имеем $\varphi = \frac{\pi}{2}$

(рис. 27, *а*) (угол φ можно определить для точки $p_0$, даже если она и не является вершиной разбиения). Проведем горизонтальную прямую $L$, разделяющую точки $p_0$ и $q_0$. Возьмем ε-окрестность точки $q_0$, подчиненную единственному условию: чтобы она не имела общих точек с прямой $L$. Ввиду непрерывности отображения $f$ в точке $p_0$, существует такая ее δ-окрестность, что образы всех точек этой окрестности лежат в упомянутой ε-окрестности точки $q_0$. Мы подчиним найденную δ-окрестность точки $p_0$ еще одному требованию: возьмем ее настолько малой, чтобы она не имела общих точек с прямой $L$.

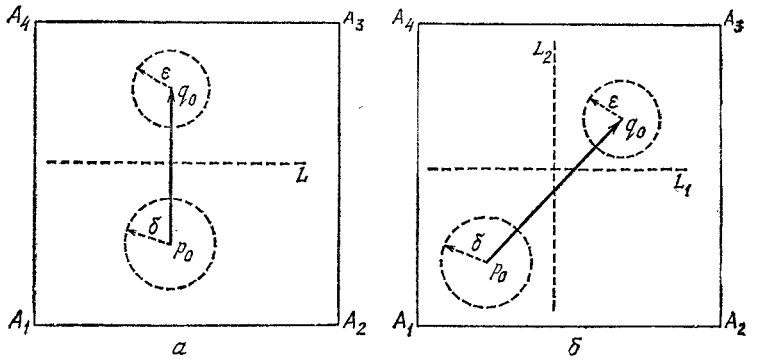



Рис. 27

Тогда названные δ-окрестность и ε-окрестность не только не имеют общих точек, но и каждая точка из ε-окрестности точки $q_0$ лежит выше любой точки из δ-окрестности точки $p_0$. Поэтому если $p$ — любая точка (например, вершина разбиения), лежащая в δ-окрестности точки $p_0$, и $q = f(p)$ — ее образ, то вектор смещения $(p, q)$ направлен вверх с возможным отклонением влево или вправо. Иначе говоря, для угла φ, соответствующего точке $p$, справедливы неравенства $0 < \varphi < \pi$. Значит, такая точка должна иметь одну из двух отметок: 1 или 2.

С другой стороны, если взять номер $n$ достаточно большим, то вершины $x_n$, $y_n$, $z_n$, $u_n$ квадрата $Q_n$ лежат в найденной δ-окрестности точки $p_0$, и поэтому каждая из этих вершин не может иметь других отметок, кроме 1 или 2. Получается противоречие с тем, что вершины $Q_n$ должны иметь не меньше трех разных отметок.

Рассмотрим второй случай, когда вектор смещения $(p_0, q_0)$ направлен вверх с отклонением, например, вправо, т. е. когда для точки $p_0$ имеем $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (рис. 27, *б*). Проведем теперь две прямые, горизонтальную $L_1$ и вертикальную $L_2$, так, чтобы каждая из них разделяла точки $p_0$ и $q_0$. Теперь $\varepsilon$-окрестность точки $q_0$ и $\delta$-окрестность точки $p_0$ выберем так же, как и раньше, но подчиним их дополнительному условию, чтобы каждая из них не имела общих точек ни с $L_1$, ни с $L_2$. Тогда если $p$ — любая точка из $\delta$-окрестности точки $p_0$ и $q = f(p)$, то для угла $\varphi$, соответствующего точке $p$, верны неравенства $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Значит, такая точка может иметь только одну отметку, а именно 1.

Если теперь рассмотреть вместо точки $p$ вершины квадрата $Q_n$ с достаточно большим номером, то опять получаем противоречие.

Мы рассмотрели два случая, соответствующие первым двум строкам таблицы. Остальные шесть случаев можно предоставить разобрать читателю. Теорема Брауэра для квадрата доказана.

## § 9. МЕТОД ИТЕРАЦИЙ

Рассмотрим задачу приближенного решения уравнения

$$x = f(x), \tag{9.1}$$

где $f$ — непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ в себя. Иначе говоря, это — задача о приближенном нахождении неподвижной точки отображения. Можно попробовать решить уравнение (9.1) следующим образом. Возьмем в качестве «начального приближения» к корню произвольное число $x_1$ из отрезка $[a, b]$ и подставим его в правую часть уравнения. Полученное значение $x_2 = f(x_1)$ примем за второе приближение к корню. Вообще, если найдено приближение $x_n$, то следующее приближение $x_{n+1}$ определяется по формуле $x_{n+1} = f(x_n)$.

Если последовательность чисел $\{x_n\}$ (называемая *итерационной последовательностью*) имеет предел $x_0$, то число $x_0$ и является (точным) корнем уравнения (9.1). В самом деле, когда $n$ стремится к бесконечности, левая часть равенства $x_{n+1} = f(x_n)$ стремится к $x_0$, а правая

часть, в силу непрерывности функции $f(x)$, стремится к $f(x_0)$, и поэтому $x_0 = f(x_0)$.

На практике процесс нахождения *итераций* $x_n$, конечно, обрывается на некотором конечном шаге, а именно тогда, когда с заданной степенью точности мы получим равенство $x_n \approx x_{n+1}$. Так как $x_{n+1} = f(x_n)$, то это значит, что с заданной точностью выполняется равенство $x_n \approx \approx f(x_n)$, т. е. $x_n$ есть приближенное значение искомого корня.

Такой способ приближенного решения уравнения (9.1) называется *методом итераций* или *методом последовательных приближений.*

Метод итераций удобно интерпретировать геометрически. Как мы уже знаем (см. § 1), разыскание корня уравнения (9.1) есть не что иное, как нахождение абсциссы точки пересечения графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = x$. На рис. 28 показаны эти два графика, а

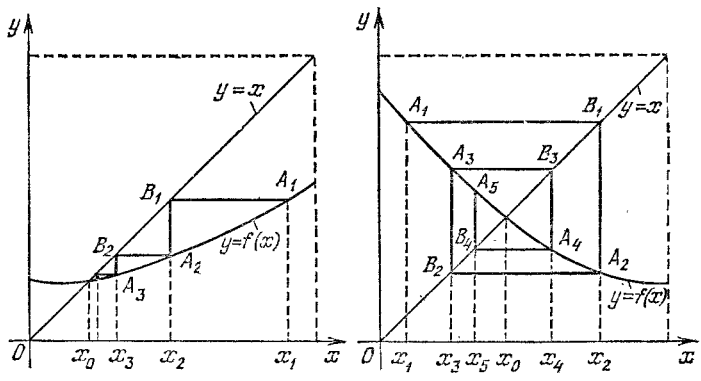



Рис. 28

также так называемая *итерационная ломаная*, которая строится следующим образом. Из точки $x_1$ на оси $Ox$ проводим вертикальную прямую до пересечения с графиком функции $y = f(x)$ в точке $A_1$. Эта точка имеет координаты $(x_1, x_2) = (x_1, f(x_1))$. Из точки $A_1$ проводим горизонтальную прямую до пересечения с прямой $y = x$ в точке $B_1$. Эта точка имеет координаты $(x_2, x_2) = = (f(x_1), f(x_1))$. Из точки $B_1$ снова проводим вертикальную прямую до пересечения с графиком $y = f(x)$ в точке $A_2$, имеющей координаты $(x_2, x_3) = (x_2, f(x_2))$ и т. д. Рисунок наглядно показывает, как сходится процесс

итераций: точки $A_1$, $A_2$, $A_3$, ... приближаются к искомой точке пересечения, а их абсциссы $x_1$, $x_2$, $x_3$, ... — к корню уравнения.

Легко видеть, что процесс итераций не всегда сходится. Рассмотрим, например, уравнение $x = f(x)$, где $f(x) = 1 - x$. Если взять в качестве начального приближения число $x_1 = \frac{1}{4}$, то

$$x_2 = x_4 = x_6 = \ldots = \frac{3}{4}, \qquad x_3 = x_5 = x_7 = \ldots = \frac{1}{4},$$

и поэтому итерационная последовательность не сходится; процесс, как говорят, «зацикливается». Читатель легко проверит, что итерационная ломаная в этом случае состоит из четырех сторон квадрата, а не имеет вида «лестницы» или «спирали», как на рис. 28.

Мы хотим сейчас указать достаточные условия сходимости процесса итераций. Для этого введем следующее понятие. Отображение $f$ отрезка $[a, b]$ в себя называется *сжимающим* отображением (или просто *сжатием*), если оно уменьшает расстояние между любыми двумя точками этого отрезка по крайней мере в $M$ раз, где $M > 1$. Так как расстояние между точками $x_1$ и $x_2$ равно $|x_1 - x_2|$, то это условие формулируется так: существует такое число $\alpha$, что $0 < \alpha < 1$ и для любых двух точек $x_1$ и $x_2$ из отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \alpha |x_1 - x_2|. \qquad (9.2)$$

Число $\alpha$ связано с упомянутым выше числом $M$ соотношением $\alpha = \frac{1}{M}$. Из неравенства (9.2) легко следует непрерывность отображения $f$.

Пусть $f$ — сжимающее отображение отрезка $[a, b]$ в себя. Из теоремы о промежуточных значениях в усиленной форме (см. задачу 31) следует, что образом отрезка $[a, b]$ тоже является какой-то отрезок $[a_1, b_1]$, лежащий на $[a, b]$. При этом не обязательно концы отрезка $[a, b]$ переходят в точки $a_1$ и $b_1$; прообразами этих точек служат какие-то точки $x_1$ и $x_2$ из отрезка $[a, b]$: $f(x_1) = a_1$, $f(x_2) = b_1$. Так как $f$ — сжатие, то ввиду неравенства (9.2)

$$|a_1 - b_1| = |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \alpha |x_1 - x_2| \leqslant \alpha |a - b|.$$

Таким образом, отображение переводит отрезок $[a, b]$ в его часть $[a_1, b_1]$, длина которой не превосходит

$\alpha|a-b|$. Тогда отрезок $[a_1, b_1]$ переходит тоже в свою часть — отрезок $[a_2, b_2]$, причем

$$|a_2 - b_2| \leqslant \alpha |a_1 - b_1|.$$

Пусть $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... — система отрезков, получающихся из $[a, b]$ последовательным применением отображения $f$. Тогда для любого номера $n$ имеем

$$|a_n - b_n| \leqslant \alpha |a_{n-1} - b_{n-1}|,$$

и поэтому

$$|a_n - b_n| \leqslant \alpha |a_{n-1} - b_{n-1}| \leqslant \alpha^2 |a_{n-2} - b_{n-2}| \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant \alpha^n |a - b|. \quad (9.3)$$

Так как $0 < \alpha < 1$, то последовательность чисел $\{\alpha^n\}$ стремится к нулю, а поэтому и длины отрезков $[a_n, b_n]$ стремятся к нулю, когда $n$ стремится к бесконечности. Значит, существует единственная точка $x_0$, принадлежащая всем этим отрезкам.

Если теперь $x_1$ — любая точка (начальное приближение) на отрезке $[a, b]$ и $\{x_n\}$ — соответствующая итерационная последовательность, то для всех номеров $n \geqslant 2$ точка $x_n$ содержится в отрезке $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ и, значит, $x_n \to x_0$. Отсюда, как мы знаем, следует, что $x_0$ является корнем уравнения (9.1). Других корней у этого уравнения нет. В самом деле, если $f(x_0) = x_0$ и $f(y_0) = y_0$, то из условия сжатости

$$|x_0 - y_0| = |f(x_0) - f(y_0)| \leqslant \alpha |x_0 - y_0|.$$

Так как $\alpha < 1$, то отсюда имеем $|x_0 - y_0| = 0$, т. е. точки $x_0$ и $y_0$ совпадают.

Итак, если $f$ — сжимающее отображение отрезка $[a, b]$ в себя, то при любом начальном приближении $x_1$ итерационная последовательность сходится к единственному корню уравнения (9.1).

Подобно тому как были получены неравенства (9.3), можно получить следующую оценку погрешности приближенного значения $x_n$ корня:

$$|x_n - x_0| \leqslant \alpha^n |x_1 - x_0|,$$

т. е. погрешность убывает с ростом $n$ по крайней мере со скоростью геометрической прогрессии, имеющей знаменатель $\alpha$.

Подробнее с методом итераций читатель может познакомиться по книге [4] и статье [2].

Заметим, что указанное выше условие сходимости процесса итераций дает такую теорему о неподвижной точке: *всякое сжимающее отображение числовой прямой в себя имеет единственную неподвижную точку* (см. в связи с этим задачу 32).

### ЗАДАЧИ

29. Постройте итерационные последовательности (и изобразите соответствующие итерационные ломаные) для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$, взяв за начальное приближение $x_1 = 1$, а затем $x_1 = 2$.

30. Пусть функция $f(x)$ возрастает и непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Постройте итерационные ломаные, взяв за начальное приближение сначала $x_1 = a$, а затем $x_1 = b$. Докажите, что итерационные процессы в обоих случаях сходятся (хотя $f$ — не обязательно сжатие). Будут ли корни, построенные этими двумя способами, обязательно совпадать?

31. Докажите теорему о промежуточных значениях в следующей усиленной форме. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, $A$ — ее наименьшее и $B$ — наибольшее значения на этом отрезке. Это значит, что $f(x) \geqslant A$ для всех $x$ из отрезка и имеется такая точка $x_1$, что $f(x_1) = A$. Аналогично, $f(x) \leqslant B$ для всех $x$ и имеется такая точка $x_2$, что $f(x_2) = B$. Пусть $A < c < B$. Тогда на отрезке $[a, b]$ найдется такая точка $x_0$, что $f(x_0) = c$.

32. Пусть $f$ — сжимающее отображение числовой прямой в себя. Докажите, что тогда имеется отрезок этой прямой, который переводится в себя отображением $f$.

33. Можно ли применить метод итераций к решению уравнения $x = \frac{1}{4 + x^2}$? Имеется ли отрезок, который переводится в себя отображением $f(x) = \frac{1}{4 + x^2}$?

## § 10. РЕТРАКЦИЯ

Со свойством неподвижной точки тесно связано понятие ретракции. Пусть $X$ — какое-то множество и $Y$ — его подмножество (часть). Говорят, что $Y$ является *ретрактом* множества $X$, если существует непрерывное отображение $f\colon X \to Y$, оставляющее неподвижной каждую точку множества $Y$, или, иными словами, тождественное на $Y$. Само отображение $f$ в этом случае называется *ретракцией* множества $X$ на $Y$.

Таким образом, например, отрезок является ретрактом квадрата (пример 1), а также ретрактом треуголь-

ника, любого выпуклого многоугольника, куба и т. д. Окружность служит ретрактом кругового кольца, заключенного между двумя концентрическими окружностями.

Важность понятия ретракта выясняется из следующей теоремы.

Теорема (о ретракции). *Если множество $X$ имеет свойство неподвижной точки и $Y$ — ретракт множества $X$, то $Y$ также обладает свойством неподвижной точки.*

Доказательство. Пусть $g$: $X \to Y$ — ретракция и пусть $f$: $Y \to Y$ — любое непрерывное отображение. Рассмотрим композицию $\psi = fg$ этих отображений (при этом сначала применяется отображение $g$, а потом $f$). Тогда $\psi$ — непрерывное отображение множества $X$ в $Y$, или, поскольку $Y$ содержится в $X$, можно считать, что $\psi$ — непрерывное отображение $X$ в себя. Поэтому $\psi$ имеет неподвижную точку $x_0$, которая, конечно, содержится во множестве $Y$. Так как на $Y$ отображение $g$ тождественно, то там отображения $\psi$ и $f$ совпадают. Значит, $x_0$ является неподвижной точкой отображения $f$: $Y \to Y$.

Так как квадрат обладает свойством неподвижной точки, а отрезок — ретракт квадрата, то из теоремы о ретракции получается новое доказательство теоремы о неподвижной точке для отрезка. Таким же образом заключаем, что свойство неподвижной точки имеют все ретракты квадрата, например круг, треугольник, квадрат с «хвостом» (рис. 29).

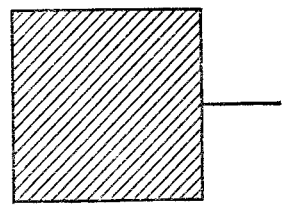


Рис. 29

Легко видеть, что окружность не обладает свойством неподвижной точки: при повороте, например, на угол $\frac{\pi}{2}$ все ее точки смещаются. Так как круг обладает свойством неподвижной точки, то отсюда получаем важное следствие: *не существует ретракции круга на его граничную окружность* (ср. с примером 3).

Таким образом, это утверждение о неретрагируемости круга на его границу получено нами как следствие теоремы о неподвижной точке.

С другой стороны, теорема о неподвижной точке для круга легко следует из теоремы о неретрагируемости круга на его границу.

Проведем это доказательство методом от противного. Пусть существует непрерывное отображение $g\colon K \to K$ круга $K$ в себя без неподвижных точек, т. е. пусть $g(p) \neq p$ для любой точки $p$ из $K$. Для каждой такой точки $p$ рассмотрим луч, соединяющий точки $p$ и $g(p)$ и направленный от $g(p)$ к $p$. Пусть $f(p)$ есть точка пересечения этого луча с граничной окружностью $C$ (рис. 30).

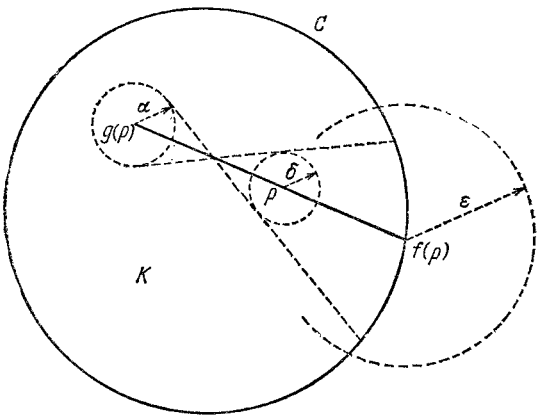



Рис. 30

Тогда, ставя в соответствие точке $p$ точку $f(p)$, получаем отображение $f\colon K \to C$, очевидно, оставляющее неподвижными все точки окружности $C$. Теперь, чтобы прийти к противоречию, остается проверить непрерывность отображения $f$.

Для этого возьмем любое число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\varepsilon$-окрестность точки $f(p)$ (дугу) на окружности $C$. Так как отображение $g\colon K \to K$ непрерывно в точке $p$, то для любого числа $\alpha > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что любая точка из $\delta$-окрестности точки $p$ переходит при этом отображении в $\alpha$-окрестность точки $g(p)$. Возьмем число $\alpha$ настолько малым, чтобы луч, выходящий из любой точки $\alpha$-окрестности и проходящий через любую точку зависящей от числа $\alpha$ $\delta$-окрестности, проходил при пересечении с $C$ через $\varepsilon$-окрестность точки $f(p)$ (см. рис. 30). Это означает непрерывность отображения $f$.

Итак, мы вывели теорему о неподвижной точке для круга из теоремы о неретрагируемости. Чтобы полностью обосновать этот вывод, нужно дать другое, неза-

висимое доказательство последней теоремы. Однако на этом мы не можем останавливаться.

В качестве приложения понятия ретракции возвратимся к механической задаче, которую мы рассматривали в конце § 7. Будем теперь предполагать, что поезд движется по произвольной кривой на плоскости, а обычный шарнир у стержня заменен сферическим так, что стержень может наклоняться и падать во все стороны. Как и раньше, мы покажем, что можно найти такое начальное положение стержня, чтобы он не упал за все время движения поезда.

Теперь положение стержня определяется двумя координатами: углом $\varphi$, измеряющим его отклонение от вертикального стоячего положения, и углом $\alpha$, измеряющим отклонение его горизонтальной проекции от фиксированного направления на полу вагона. Пару чисел $(\varphi, \alpha)$ удобно интерпретировать как полярные координаты точки плоскости: $\varphi$ есть ее радиус-вектор и $\alpha$ — полярный угол. Легко видеть, что мы имеем такие ограничения на эти координаты: $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. Иными словами, положение стержня в любой момент времени полностью определяется точкой круга радиуса $\frac{\pi}{2}$, или, как говорят, круг есть фазовое пространство нашей системы.

Допустим, что стержень всегда падает. После этого его координаты станут равными $\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right)$. Это значит, что, ставя в соответствие каждому его начальному положению соответствующее конечное положение, мы определяем непрерывное отображение круга на его границу, и притом тождественное на всей границе. Последний факт — следствие того, что стержень, который с самого начала лежал на полу, остается лежать и дальше. Так как указанное отображение невозможно, то мы доказали нужное утверждение.

## ЗАДАЧИ

**34.** Обладают ли свойством неподвижной точки: а) круговое кольцо; б) фигура «восьмерка», т. е. множество, состоящее из двух окружностей, имеющих единственную общую точку?

**35.** Являются ли ретрактами квадрата (или круга): а) триод, т. е. фигура буквы Т; б) $n$-од, т. е. фигура, состоящая из $n$ отрезков, которые все выходят из одной точки и больше не имеют попарно никаких других общих точек; в) фигура «восьмерка»?

**36.** Является ли отрезок ретрактом: а) триода; б) окружности; в) множества, состоящего из двух отрезков без общих точек?

37. Является ли ретрактом отрезка множество, состоящее из двух различных точек?

38. Является ли круговое кольцо ретрактом круга?

39. Будет ли ретракт компакта снова компактом?

40. Существует ли непрерывное отображение квадрата на всю его границу, не обязательно тождественное на границе?

41. Докажите следующую теорему о «промежуточных значениях» для круга: пусть $K$ — круг в плоскости $\mathbb{R}^2$, $C$ — его граничная окружность, $f\colon K \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение круга в плоскость, тождественное на окружности $C$; тогда $f$ «принимает все значения в $K$», т. е. для любой точки $q$ из круга $K$ найдется такая точка $p$ из $K$, что $f(p) = q$.

42. Пусть $f\colon K \to \mathbb{R}^2$ — такое же отображение, как и в предыдущей задаче, и $g\colon K \to K$ — любое непрерывное отображение круга $K$ в себя. Докажите, что в круге $K$ найдется такая точка $p$, что $f(p) = g(p)$. Сохранится ли это утверждение в силе, если в качестве $g$ рассматривать произвольное непрерывное отображение круга $K$ в плоскость $\mathbb{R}^2$?

## § 11. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ. ГОМОТОПИЯ. СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ

Как мы знаем, окружность не имеет свойства неподвижной точки: некоторые ее непрерывные отображения в себя (например, тождественное) обладают неподвижными точками, другие (например, поворот на малый угол, отличный от нуля) их не имеют. Чтобы яснее представить себе всю картину этих отображений, познакомимся с их классификацией, введенной Брауэром. Говорят, что два непрерывных отображения $f$ и $g$ окружности $C$ в себя принадлежат одному классу, или что они *гомотопны* между собой, если одно из них можно непрерывно перевести, или деформировать, в другое. Более точно это значит, что существует семейство $f_t\colon C \to C$ непрерывных отображений окружности $C$ в себя, зависящее, и притом непрерывно, от параметра $t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, такое, что $f_0 = f$ и $f_1 = g$. Это семейство называется *гомотопией*, связывающей $f$ и $g$, а сами отображения $f$ и $g$ — *гомотопными*.

Рассмотрим, например, два отображения на рис. 31: одно из них тождественное, другое имеет три складки. (Отображения на этом рисунке следует понимать так: внутренняя окружность является множеством-образом, наружная кривая — множеством-прообразом; отображение состоит в проецировании наружной кривой на внутреннюю вдоль радиусов.) Складки второго отображения можно расправить с помощью непрерывной деформации (см. последовательные положения деформируемого

отображения на рис. 32), и тогда второе отображение непрерывно перейдет в первое. Значит, эти отображения

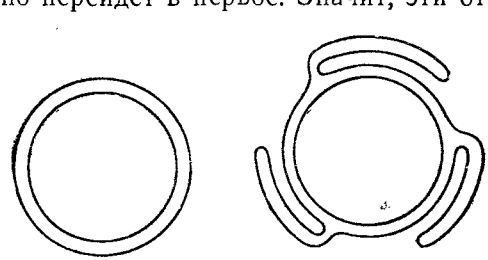


Рис. 31

принадлежат одному классу: они гомотопны между собой. С другой стороны, отображение на рис. 33, при котором окружность как бы наматывается на себя дважды,

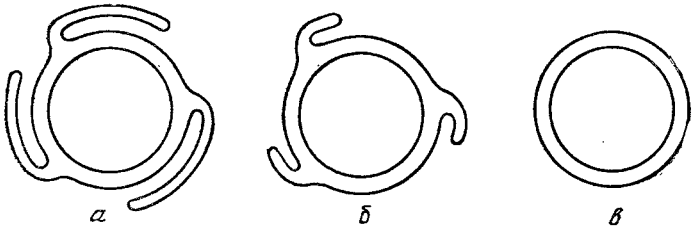



Рис. 32

нельзя непрерывно перевести в тождественное. Следовательно, эти отображения принадлежат разным классам: они не гомотопны.

Как уже было сказано в § 7, положение точки $x$ на окружности определяется ее угловой координатой $\alpha$. Там предполагалось, что $\alpha$ изменяется от 0 до $2\pi$. Теперь мы расширим множество допустимых значений угла $\alpha$. Ведь если точка, обойдя один раз окружность в положительном направлении от $\alpha = 0$ до $\alpha = 2\pi$, продолжает двигаться дальше, то естественно считать, что ее угловая координата стала больше, чем $2\pi$. После двукратного обхода окружности угол $\alpha$ примет значение $4\pi$, затем $6\pi$ и т. д. Аналогично, движение точки в противоположном направлении приводит к отрицательным зна-

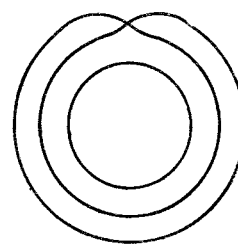


Рис. 33

чениям ее угловой координаты. Таким образом, каждой точке окружности соответствует бесконечно много значений угла $\alpha$; все они отличаются друг от друга на целое кратное числа $2\pi$.

Пусть $f$ — непрерывное отображение окружности $C$ в себя, переводящее точку $x$ с угловой координатой $\alpha$ в точку $y = f(x)$ с угловой координатой $\beta$. Тогда ясно, что $\beta$ является функцией от $\alpha$: $\beta = \varphi(\alpha)$. Мы можем считать, что она задана на отрезке $[0, 2\pi]$. Иначе говоря, из всех значений угловой координаты $\alpha$ мы выберем те, которые удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. Ввиду многозначности угловой координаты $\beta$ функция $\varphi(\alpha)$ тоже многозначна: она определена с точностью до слагаемого $2k\pi$, где $k$ — целое число. На рис. 34 показан график многозначной функции $\beta = \varphi(\alpha)$, соответствующей тождественному отображению $y = x$ (на рисунке для удобства масштабы по осям $\alpha$ и $\beta$ выбраны различными). Видно, что график имеет бесконечно много «ветвей».

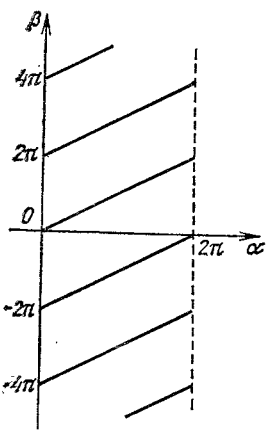


Рис. 34

Предположим, что в точке $\alpha_0 = 0$ отрезка $[0, 2\pi]$ мы выбрали какое-либо одно значение функции $\varphi(\alpha)$, например такое, что $0 \leqslant \varphi(0) < 2\pi$ (этого соглашения мы будем придерживаться всюду в дальнейшем). Пусть $\alpha_1$ — какая-то другая точка отрезка $[0, 2\pi]$. Если точка $x$ непрерывно перемещается по окружности так, что ее угловая координата изменяется от 0 до $\alpha_1$, то угловая координата $\beta = \varphi(\alpha)$ точки $y = f(x)$ изменяется непрерывно и поэтому получает при $\alpha = \alpha_1$ вполне определенное значение $\beta_1 = \varphi(\alpha_1)$. Тем самым на отрезке $[0, 2\pi]$ выделяется однозначная и непрерывная ветвь многозначной функции $\varphi$. Именно эта ветвь будет подразумеваться дальше, когда речь пойдет о функции $\varphi$.

Если, в частности, $\alpha_1$ принимает значение $2\pi$, то мы приходим таким способом к равенству

$$\varphi(2\pi) - \varphi(0) = 2n\pi, \qquad (11.1)$$

где $n$ — некоторое целое число, положительное, отрицательное либо равное нулю. Равенство (11.1) вытекает из

того, что $\varphi(0)$ и $\varphi(2\pi)$ — угловые координаты одной и той же точки на окружности.

Поясним геометрический смысл равенства (11.1). Когда точка $x$ один раз обходит окружность в положительном направлении, то точка-образ $f(x)$ тоже движется по окружности непрерывно, но не обязательно равномерно. Она может ускорять и замедлять движение, останавливаться, двигаться в обратном направлении. Но «в конце концов» она снова займет свое прежнее положение, сделав при этом полное число оборотов по окружности, равное числу $n$. Именно этот факт и отмечен соотношением (11.1).

Число $n$ называется *степенью* отображения $f$ и обозначается через $\deg f$.

Итак, всякому непрерывному отображению $y = f(x)$ окружности $C$ в себя соответствует однозначная непрерывная функция $\beta = \varphi(\alpha)$, заданная на отрезке $[0, 2\pi]$ и

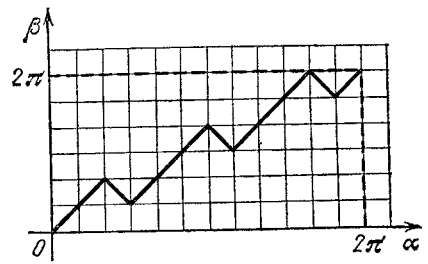



Рис. 35

удовлетворяющая на его концах условию (11.1). Обратно, каждая такая функция $\varphi$ определяет некоторое непрерывное отображение окружности в себя. Пример: на рис. 35 показан график функции $\varphi$, соответствующей второму отображению рис. 31.

Мы хотим теперь сделать заключения о свойствах отображения $f$ исходя из свойств функции $\varphi$.

Всякие две непрерывные функции на любом отрезке или, иначе говоря, всякие непрерывные отображения $\varphi_0(\alpha)$ и $\varphi_1(\alpha)$ отрезка в числовую прямую гомотопны между собой: связывающую их гомотопию можно задать формулой

$$\varphi_t(\alpha) = (1 - t)\,\varphi_0(\alpha) + t\varphi_1(\alpha), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \quad (11.2)$$

Параметр $t$ здесь можно рассматривать как время, в течение которого происходит деформация, а саму эту

деформацию — как равномерное вертикальное перемещение при каждом $\alpha$ точки одного графика в точку другого.

Исходя из этого покажем, что два непрерывных отображения $f_0$ и $f_1$ окружности в себя гомотопны тогда и только тогда, когда они обладают одинаковыми степенями.

Действительно, если отображение $f_0$ непрерывно деформируется в отображение $f_1$, то это же происходит с соответствующими им функциями $\varphi_0(\alpha)$ и $\varphi_1(\alpha)$, причем разности $\varphi_0(2\pi) - \varphi_0(0)$ и $\varphi_1(2\pi) - \varphi_1(0)$ равны: ведь каждая из них есть не что иное, как изменение угловой координаты одной и той же точки на окружности. Следовательно, при непрерывных деформациях степень отображения сохраняется неизменной.

Обратно, пусть отображения $f_0$ и $f_1$ имеют равную степень $n$. Рассмотрим соответствующие им функции $\varphi_0(\alpha)$ и $\varphi_1(\alpha)$ и свяжем их гомотопией (11.2). Тогда каждая «промежуточная» функция $\varphi_t(\alpha)$ удовлетворяет равенству (11.1):

$$\begin{aligned}\varphi_t(2\pi) - \varphi_t(0) = \\ = (1-t)\varphi_0(2\pi) + t\varphi_1(2\pi) - (1-t)\varphi_0(0) - t\varphi_1(0) = \\ = (1-t)[\varphi_0(2\pi) - \varphi_0(0)] + t[\varphi_1(2\pi) - \varphi_1(0)] = \\ = (1-t)\,2n\pi + t \cdot 2n\pi = 2n\pi.\end{aligned}$$

Это значит, что семейству функций $\varphi_t(\alpha)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ отвечает семейство непрерывных отображений $f_t$ окружности в себя: когда параметр $t$ изменяется от 0 до 1, точка $f_t(x)$ равномерно перемещается по дуге окружности из положения $f_0(x)$ в положение $f_1(x)$. Иначе говоря, отображения $f_0$ и $f_1$ гомотопны.

Итак, степень является характеристическим свойством целого класса гомотопных отображений.

В качестве примера рассмотрим линейное отображение $f_n$ окружности в себя, задаваемое соотношением

$$\varphi_n(\alpha) = n\alpha, \qquad n \neq 0, \qquad n \text{ — целое число.} \quad (11.3)$$

Его «геометрия» такова: когда точка $x$, соответствующая углу $\alpha$, пробегает окружность один раз в положительном направлении, то ее образ $y = f_n(x)$, соответствующий углу $n\alpha$, пробегает окружность $n$ раз, и притом в положительном направлении, если $n > 0$, и в отрицательном при $n < 0$. График функции $\varphi_n(\alpha)$ есть

отрезок прямой, соединяющий точки с координатами $(0, 0)$ и $(2\pi, 2n\pi)$. Это показывает, что степень отображения $f_n$ равна $n$; следовательно, при различных значениях чисел $m$ и $n$ отображения $f_m$ и $f_n$ не гомотопны.

Из сказанного заключаем, что все непрерывные отображения в себя распадаются на бесконечно много классов, по одному классу для каждого целого числа $n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Все отображения одного класса гомотопны между собой и имеют одинаковую степень $n$. Представителем такого класса является линейное отображение $f_n$, определяемое формулой (11.3). В частности, при $n = 0$ отображение (11.3) тоже определено и переводит всю окружность в одну точку. Это дает полную гомотопическую классификацию отображений, упомянутую в начале § 11.

Докажем, что всякое непрерывное отображение $f\colon C \to C$ окружности в себя, степень которого равна $n$, имеет не меньше чем $|n-1|$ неподвижных точек. Для этого рассмотрим на отрезке $[0, 2\pi]$ функцию $F(\alpha) = \varphi(\alpha) - \alpha$, где $\varphi(\alpha)$ — однозначная ветвь угловой координаты точки $f(x)$. Из равенства (11.1) получаем

$$F(2\pi) - F(0) = 2(n-1)\pi.$$

Таким образом, если $F(0) = \varphi(0) = \beta_0$, то $F(2\pi) = \beta_0 + 2(n-1)\pi$. Отрезок числовой прямой с концами $\beta_0$ и $\beta_0 + 2(n-1)\pi$ имеет длину $2\pi|n-1|$ и, следовательно, содержит по крайней мере $|n-1|$ чисел, равных последовательным целым кратным $2\pi$. По теореме о промежуточных значениях на отрезке $[0, 2\pi]$ найдутся числа $\alpha_i$ ($i = 1, 2, \ldots, |n-1|$), в которых функция $F(\alpha)$ принимает значения, равные указанным числам, т. е.

$$F(\alpha_i) = 2\pi \cdot k_i, \qquad k_i \text{ — целые.}$$

Поэтому

$$\varphi(\alpha_i) = \alpha_i + 2\pi \cdot k_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, |n-1|.$$

Последнее равенство показывает, что точки окружности $C$, имеющие угловые координаты $\alpha_i$, являются неподвижными при отображении $f\colon C \to C$.

Случай, когда $\deg f = 1$, является исключительным: некоторые отображения с такой степенью имеют неподвижные точки, а другие — нет (заметим в связи с этим, что степени обоих отображений, указанных в самом начале § 11, равны единице).

## ЗАДАЧИ

43. Докажите, что всякие два непрерывных отображения $f_0$ и $f_1$ отрезка (а также окружности или квадрата) в числовую прямую гомотопны между собой.

44. Представим себе обычные часы с двумя стрелками: часовой и минутной. В каждый момент времени положению $\alpha$ часовой стрелки (измеряемому, например, в часах в пределах от 0 до 12, или в градусах от 0 до 360, или в радианах от 0 до $2\pi$) соответствует вполне определенное положение $f(\alpha)$ минутной стрелки. Например, если $\alpha = 3\frac{1}{2}$ часа, то $f(\alpha) = 6$ часам; если $\alpha = 5$ часам, то $f(\alpha) = 0 = 12$ часам. Тем самым определяется непрерывное отображение $f$ окружности в себя. Найдите степень этого отображения и все его неподвижные точки. Можно ли определить отображение $\varphi$ окружности в себя, ставя в соответствие каждому положению минутной стрелки положение часовой стрелки в этот же момент времени?

45. Вообразите себе «испорченные» часы, в которых: а) минутная стрелка, начиная с 0 часов, движется быстрее часовой в два раза; б) минутная стрелка, начиная с 0 часов, движется с той же скоростью, что и часовая, но в противоположном направлении; в) разность между показаниями минутной и часовой стрелок равна двум часам в любой момент времени. Отображение $f$ определено так же, как в задаче 44. Найдите во всех трех случаях степень этого отображения и его неподвижные точки.

## § 12. ВТОРОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ ОТОБРАЖЕНИЯ

Теория непрерывных отображений и их неподвижных точек для окружности и сферы во многом аналогичны. В частности, и для сферы важную роль играет понятие степени отображения. Однако тот подход к ее определению, который был использован в случае окружности, для сферы затруднителен. Поэтому мы введем другое (эквивалентное первому) определение степени отображения окружности в себя, которое допускает обобщение на случай сферы.

Это новое определение основано на подсчете числа прообразов точек окружности и на наблюдении о том, что для всех точек это число прообразов в некотором («алгебраическом») смысле одинаково.

Рассмотрим, например, еще раз линейное отображение $\beta = \varphi_n(\alpha) = n\alpha$ при $n \neq 0$. Точки окружности, угловые координаты которых отличаются на $\frac{k}{|n|} \cdot 2\pi$ ($k = 0, 1, \ldots, |n| - 1$), переходят при этом отображении в одну и ту же точку. Иначе говоря, каждая точка окружности $C$ имеет в точности $|n|$ точек-прообразов.

Пусть теперь $f$ — *кусочно линейное отображение* окружности в себя, т. е. такое, что график соответствующей функции $\beta = \varphi(\alpha)$ является ломаной линией (см. рис. 36, где $\deg f = 3$). Чтобы найти прообразы точки окружности с угловой координатой $\beta_0$ $(0 \leqslant \beta_0 < 2\pi)$, мы проводим на чертеже горизонтальные прямые $\beta = \beta_0 + 2k\pi$ $(k = 0, 1, \ldots, |n| - 1)$ и находим точки их пересечения с графиком $\beta = \varphi(\alpha)$. На рис. 36 таких точек одиннадцать. Теперь припишем каждой точке пересечения знак: положительный, если в ней функция $\varphi(\alpha)$ возрастает, и отрицательный, если она убывает. Подсчитывая, например, число прообразов угла $\beta_0 = \pi$ с учетом этого правила, мы получим $7-4=3$ прообраза — ровно столько, сколько требует степень отображения.

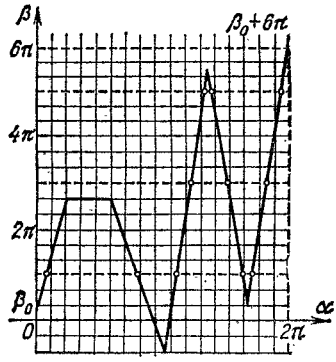


Рис. 36

Заметим, что точки, в которых график функции $\varphi(\alpha)$ касается горизонтальных прямых (т. е. угловые точки графика) или сам этот график имеет горизонтальные участки, не учитывались нами при подсчете числа прообразов. Но можно сделать иначе: каждой такой точке приписать сразу два знака (плюс и минус); ясно, что при этом алгебраическая сумма чисел прообразов не изменится.

Вообще, если взять любое кусочно линейное отображение окружности в себя, то число прообразов (с учетом их знаков) будет одинаково для всех точек. Как мы видели, это действительно так для линейного отображения $\varphi_n(\alpha) = n\alpha$, $n \neq 0$. Каждое кусочно линейное отображение можно получить из линейного непрерывной деформацией (гомотопией). При этом у некоторых точек прообразы могут появляться и исчезать, но всегда лишь парами, причем один из прообразов пары имеет знак плюс, а другой — минус. Поэтому число прообразов любой точки остается неизменным и равным как раз степени отображения в смысле ее первого определения.

Так мы приходим ко второму ее определению: *степень кусочно линейного отображения окружности* в себя есть число прообразов любой точки с учетом их знаков.

Если имеется произвольное непрерывное отображение $f$ окружности в себя, то возможны точки, имеющие бесконечно много прообразов, и поэтому приведенное определение степени для таких отображений не годится. Обычно в этом случае отображение $f$ заменяют близким, мало отличающимся от него, кусочно линейным отображением $g$, для которого $\deg g$ уже определена. Можно было бы доказать, что все такие кусочно линейные отображения $g$, близкие к $f$, имеют одно и то же значение степени. Оно и принимается за *степень* отображения $f$.

### ЗАДАЧА

**46.** Пусть имеется триангуляция квадрата, все вершины которой отмечены числами 0, 1 и 2 (по одному числу на каждую вершину), и имеется треугольник (без триангуляции), вершины которого несут эти же три отметки. Тогда можно определить кусочно линейное отображение границы квадрата в границу треугольника следующим образом: если ребро триангуляции, лежащее на границе квадрата, имеет отметки 0 и 1, то отобразим его линейно на сторону треугольника с такими же отметками; если оба конца этого ребра имеют отметку 0, то переведем его в вершину треугольника с такой же отметкой; аналогично — для всех других отметок. Докажите следующее обобщение леммы Шпернера: если степень такого отображения отлична от нуля, то в триангуляции квадрата имеется грань, несущая три разных отметки. Вместо квадрата здесь можно взять любой выпуклый многоугольник.

## § 13. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ СФЕРЫ

Теперь мы можем переходить к отображениям сферы $S$. *Большой окружностью* на $S$ называется линия пересечения сферы и плоскости, проходящей через ее центр. *Триангуляция* сферы есть ее разбиение на сферические треугольники-грани с обычным требованием о их взаимном расположении (см. начало § 4). Стороны этих треугольников всегда являются дугами больших окружностей. На рис. 37 показаны две триангуляции сферы, полученные центральным проецированием на нее всех граней вписанных правильных октаэдра (восьмигранника) и икосаэдра (двадцатигранника).

Иногда нам будет удобно представлять себе сферу топологически «реализованной» в виде поверхности какого-нибудь фиксированного выпуклого многогранника, например октаэдра (рис. 38). Сфера $S$ и эта поверхность, конечно, гомеоморфны между собой, но мы будем считать их просто «тождественными». Грани октаэдра

будут триангулированными на более мелкие треугольники. Такой точки зрения мы придерживаемся при рассмотрении кусочно линейных отображений.

Пусть имеются две триангуляции сферы $S$, вообще говоря, различные. Непрерывное отображение сферы в

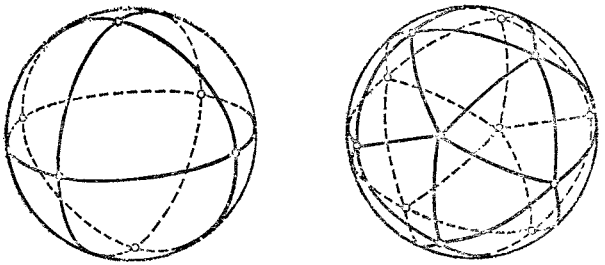


Рис. 37

себя называется *кусочно линейным*, если каждый треугольник — грань первой триангуляции — линейно *) отображается либо на какой-то треугольник — грань второй триангуляции, либо на одну его сторону — ребро триангуляции, либо в его вершину.

*Ориентируется* сфера следующим образом. Пусть точка движется на ней по маленькой окружности (или по границе какой-нибудь треугольной грани), а наблюдатель находится вне сферы с той же стороны от ее центра, что и окружность. Тогда движение точки в положительном направлении он воспринимает происходящим против часовой стрелки.

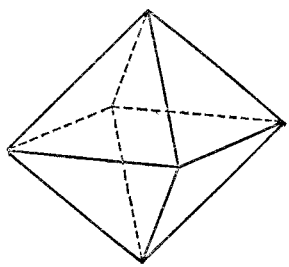


Рис. 38

Пусть $ABC$ — грань триангуляции сферы, и кусочно линейное отображение $f$ переводит ее в грань $A_1B_1C_1$ другой триангуляции, причем $f(A)=A_1$, $f(B)=B_1$ и $f(C)=C_1$. Пусть порядок вершин $ABCA$ определяет положительное направление обхода по границе грани $ABC$.

*) Линейное отображение одного треугольника на другой может быть определено с помощью двух линейных функций двух переменных или как отображение, сохраняющее барицентрические координаты (об этих координатах см. книгу [1]).

Назовем эту грань *положительной*, если ее ориентация при отображении $f$ сохраняется, т. е. если направление $A_1B_1C_1A_1$ обхода границы треугольника $A_1B_1C_1$ тоже положительно. *Отрицательной* назовем такую грань $ABC$, у которой ориентация при отображении обращается.

Пусть имеется произвольное кусочно линейное отображение какой-то одной триангуляции сферы в другую. Возьмем любую грань второй триангуляции и сосчитаем разность между числами положительных и отрицательных отображающихся на нее граней первой триангуляции (или, короче, число прообразов грани с учетом их знаков). Оказывается, что *эти разности одинаковы для всех граней второй триангуляции.* Их общее значение называется *степенью* кусочно линейного отображения.

Докажем сформулированное утверждение (теорему о степени) методом прогулок по граням. Возьмем две соседние грани $ABC$ и $ADB$ второй триангуляции (рис. 39, где показан их вид «извне» сферы) и докажем, что для них числа прообразов с учетом знаков одинаковы.

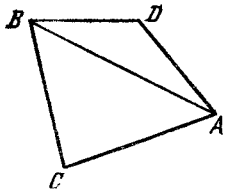


Рис. 39

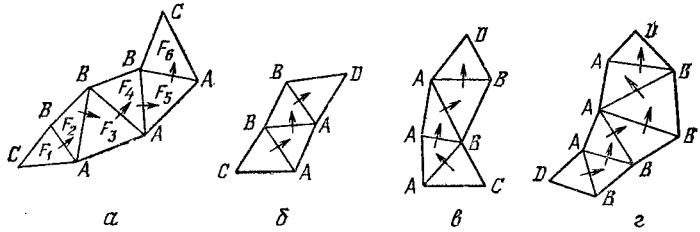
Прямо из определения кусочно линейного отображения получается вот какое утверждение. Если в первой триангуляции взять какую-нибудь грань $F_1$, отображающуюся на $ABC$, то в этой триангуляции найдется цепочка граней $F_1$, $F_2$, ..., $F_{k-1}$, $F_k$ со следующими свойствами: 1) каждые две грани с соседними номерами имеют общее ребро, 2) последняя грань $F_k$ отображается на $ABC$ или на $ADB$, 3) каждая из промежуточных граней $F_2$, ..., $F_{k-1}$ (которые, впрочем, могут отсутствовать) отображается на ребро $AB$.

Такая цепочка показана на рис. 40, *а*; буквы $A$, $B$ и $C$, стоящие на этом рисунке у вершин граней, указывают на их образы; иными словами, каждая вершина, отмеченная буквой $A$, переходит в вершину с этой же отметкой на рис. 39, и аналогично для остальных букв. Если грань $F_1$ отображается на $ABC$ с сохранением ориентации (иначе говоря, если $F_1$ положительна), то грань $F_k$ отображается на $ABC$ уже непременно с обращением ориентации (грань $F_k$ отрицательна). Это хорошо видно на рис. 40, *а*. Поэтому цепочку граней от $F_1$ до $F_k$ мы назовем путем от $+ABC$ до $-ABC$. Вообще, если построить такую цепочку от каждой грани первой триангу-

ляции, переходящей в $ABC$ или в $ADB$, то мы получим пути следующих четырех типов:

$$\text{от } +ABC \text{ к } -ABC,$$
$$\text{от } +ABC \text{ к } +ADB,$$
$$\text{от } -ABC \text{ к } -ADB,$$
$$\text{от } +ADB \text{ к } -ADB$$

(см. рис. 40). Обозначим через $m$, $n$, $p$ и $q$ число путей первого, второго, третьего и четвертого типов соответственно. Тогда число прообразов грани $ABC$ с учетом




*а* *б* *в* *г*

Рис. 40

знаков равно $m - m + n - p = n - p$; такое же число для грани $ADB$ равно $n - p + q - q = n - p$. Мы видим, что эти числа одинаковы; тем самым теорема о степени доказана для пары граней второй триангуляции, имеющих общее ребро. После этого таким же способом можно проверить это утверждение для пары граней $ADB$ и $AED$ с общим ребром $AD$, и т. д.

Чтобы определить степень произвольного непрерывного отображения сферы $f\colon S \to S$, надо, как и в случае окружности, заменить его близким к нему кусочно линейным отображением $g$, вычислить $\deg g$ и убедиться в том, что любые два таких приближения $g_1$ и $g_2$ приводят к одинаковому значению степени. Это значение по определению и принимается за *степень* отображения $f$.

В качестве простого примера, который мы тотчас же используем, укажем, что *тождественное* отображение сферы, оставляющее все точки неподвижными, имеет степень 1. С другой стороны, рассмотрим *антиподальное* отображение, переводящее каждую точку $x$ в ее антипод $x^*$ — диаметрально противоположную точку. Такое отображение обращает ориентацию сферы (рис. 41), и его степень равна —1. Однако на окружности, в отличие от

сферы, антиподальное отображение сохраняет ориентацию и имеет степень 1.

Лемма 5. *Пусть $f$ и $g$ — непрерывные отображения сферы в себя такие, что, какова бы ни была точка $x$ на сфере, ее образы $f(x)$ и $g(x)$ не являются антиподами: $f(x) \neq [g(x)]^*$. Тогда $f$ и $g$ гомотопны и имеют одинаковую степень*: $\deg f = \deg g$.

Действительно, так как точки $f(x)$ и $g(x)$ — не антиподы, то для них имеется однозначно определенная дуга большой окружности, соединяющая эти точки и имеющая длину, меньшую длины полуокружности. Поэтому если заставить точку $f(x)$ равномерно относительно всех $x$ перемещаться по этой дуге в точку $g(x)$, то мы получим гомотопию, связывающую отображения $f$ и $g$. При непрерывной деформации отображения его степень меняется тоже непрерывно. Но так как степень — всегда целое число, то она должна оставаться при этом постоянной.

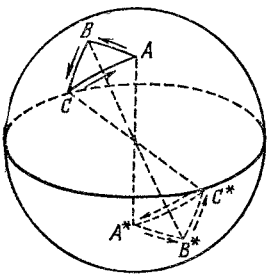


Рис. 41

Для окружности лемма 5, конечно, тоже верна.

Теорема о неподвижных точках для сферы. *Каждое непрерывное отображение $f$ сферы $S$ в себя либо имеет неподвижную точку, либо переводит некоторую точку в ее антипод. Если при этом* $\deg f \neq -1$, *то обязательно имеется неподвижная точка, а если* $\deg f \neq 1$, *то некоторая точка сферы обязательно переходит в свой антипод.*

Предположим сначала, что $\deg f \neq -1$, и докажем от противного, что есть неподвижная точка. Если бы ее не было, то можно было бы применить лемму 5 к отображению $f$ и к антиподальному отображению $g(x) = x^*$. Так как $\deg g = -1$, то мы имели бы тогда $\deg f = -1$, что невозможно.

Пусть $\deg f \neq 1$ и $f(x) \neq x^*$ для всех точек $x$ сферы $S$. Применим лемму 5 к заданному отображению $f$ и к тождественному отображению $g(x) = x$, у которого $\deg g = 1$. Тогда получаем $\deg f = 1$, что невозможно.

Пусть заранее ничего не известно о степени отображения $f$. Если оно не имеет неподвижных точек, то, как и выше, заключаем, что $\deg f = -1$. Пусть теперь ни одна точка $x$ не переводится отображением $f$ в ее анти-

под $x^*$. Применяя опять лемму 5 к отображению $f$ и к тождественному отображению, получаем $\deg f = 1$, что противоречит равенству $\deg f = -1$. Теорема доказана.

## ЗАДАЧИ

В следующих задачах 47—54 под отображением окружности или сферы в себя понимается всегда непрерывное отображение.

47. Докажите, что если $f$ — отображение окружности в себя и $\deg f \neq 1$, то $f$ имеет неподвижную точку и, кроме того, переводит некоторую точку окружности в ее антипод.

48. Пусть $f$ — то же, что и в задаче 47. Докажите следующие два утверждения: а) если ни одна точка окружности не переходит в свой антипод, то $\deg f = 1$; б) если окружность не покрыта своим образом, то существует неподвижная точка. Чему равна $\deg f$ в последнем случае?

49. Отображение $f$ окружности в себя называется *нечетным*, если оно переводит каждую пару антиподов тоже в пару антиподов, т. е. если $f(x^*) = [f(x)]^*$ для любой точки $x$ на окружности. Докажите, что степень нечетного отображения нечетна.

50. Докажите, что если $f$ — нечетное отображение окружности в себя и $\deg f \neq 1$, то имеется пара неподвижных точек-антиподов.

51. Для каждого целого числа $n$ укажите пример отображения сферы в себя, имеющего степень $n$.

52. Проверьте, что если $f_1$ и $f_2$ — отображения окружности или сферы в себя и если $f_3 = f_2 f_1$ — композиция отображений $f_1$ и $f_2$ (см. с. 22), то

$$\deg f_3 = \deg f_1 \cdot \deg f_2.$$

53. Если $f$ и $g$ — отображения сферы в себя, то хотя бы одно из трех отображений $f$, $g$ и $gf$ имеет неподвижную точку. В частности, такой точкой обладает композиция $f^2$ любого отображения $f$ с самим собой. Верно ли это утверждение для окружности?

54. Докажите, что любое отображение сферы в себя либо имеет неподвижную точку, либо переставляет некоторую пару точек. Верно ли это для окружности?

В заключение остановимся кратко на векторных полях и их особых точках. Можно ли на окружности или на сфере построить непрерывное *поле направлений*, т. е. выбрать в каждой точке такой вектор, чтобы при переходе от одной точки к другой эти векторы менялись непрерывно? Обычно интересуются полями векторов, касательных к окружности или к сфере (рис. 42).

Точки, в которых векторы обращаются в нуль или где вообще не определено никакого направления, считаются *особыми* для поля. Например, на сфере направление с севера на юг (рис. 42, *б*) имеет особые точки в полюсах, где векторы направлены в разные стороны, и непрерывность поэтому нарушается. То же можно сказать и о направлении с запада на восток (рис. 42, *в*).

Непрерывное отображение $f$ окружности в себя приводит естественным образом к векторному полю, стóит лишь из каждой точки $x$ направить вектор в ее точку-образ $f(x)$. Например, на рис. 43 изображено поле, которое возникает из отображения $\beta = 2\alpha$. Так как точка

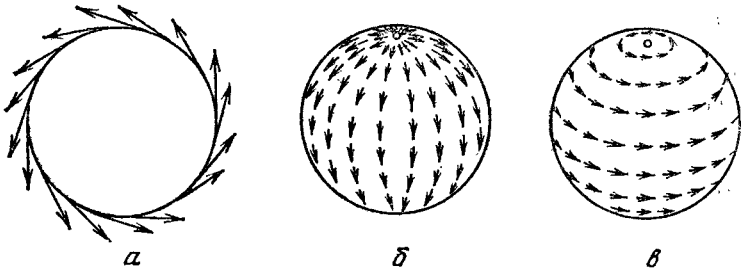



Рис. 42

$\alpha = 0$ при этом неподвижна, то она является особой точкой векторного поля.

Если ни один вектор так полученного поля не перпендикулярен к окружности (иначе говоря, если ни одна

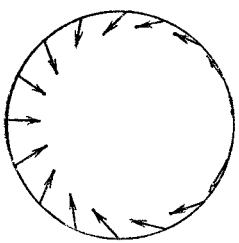


Рис. 43

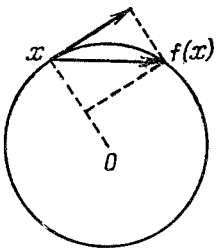



Рис. 44

точка окружности не переходит при отображении $f$ в ее антипод), то мы можем спроецировать его на касательную, проведенную в точке, откуда выходит этот вектор (рис. 44), и получить таким образом поле касательных направлений. Те векторы, которые перпендикулярны к окружности, при проецировании переходят в нулевой вектор и, следовательно, дают особые точки поля касательных направлений. На рис. 43 такой точкой является $\alpha = \pi$.

Как мы знаем (см. задачу 47), всякое непрерывное отображение окружности со степенью, отличной от 1,

имеет либо неподвижную точку, либо антиподальное свойство: переводит какую-то точку в ее антипод. С другой стороны, имеются отображения со степенью 1, без неподвижных точек и без антиподального свойства. Поэтому приходим к такому выводу: *на окружности существуют непрерывные поля касательных векторов*; *все они могут возникать только из отображений степени* 1.

Так как на сфере в с я к о е непрерывное отображение имеет либо неподвижную точку, либо антиподальное свойство, то на ней не *существует непрерывного поля касательных направлений.* Это утверждение иногда называют «теоремой о еже»: у ежа, свернувшегося в клубок, хотя бы одна иголка торчит перпендикулярно к поверхности тела.

## РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

1. Функции $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$.

4. Пусть $f$ — нетривиальная инволюция отрезка $[0, 1]$. Тогда ее график совпадает со своим зеркальным отражением в прямой $y = x$. Поэтому если график имеет две различные точки на этой прямой, то эти две точки соединяются двумя различными кривыми, входящими в график. А это невозможно ввиду того, что функция $f$ однозначна всюду на $[0, 1]$.

5. Комнаты — малые отрезки; дверями можно считать левый конец большого отрезка и точки деления с отметкой 0; тупики — малые отрезки с разными отметками.

6. Предположим, что нет ребер типа (1, —1) и (2, —2). Тогда, очевидно, нет и треугольных граней с тремя разными отметками. Докажем, что в таком случае на границе квадрата $Q$ имеется четное число ребер типа (1, —2). Назовем такое ребро дверью. Тупиком нам следовало бы назвать треугольную грань с тремя разными отметками, среди которых имеются 1 и —2, но таких граней нет. Поэтому если начинать прогулку по граням триангуляции, входя в квадрат $Q$ извне через какую-то наружную дверь (1, —2), то закончится прогулка только в том случае, когда мы выйдем из $Q$ через другую наружную дверь (1, —2). Это и значит, что число ребер (1, —2) на границе квадрата $Q$ четно.

Пусть теперь $A$ — левая нижняя вершина квадрата $Q$, $B$ — противоположная ей вершина, $S$ — часть границы $Q$, состоящая из нижней и правой сторон, $S'$ — противоположная ей часть границы. Каждому ребру типа (1, —2), лежащему на $S'$, соответствует ребро типа (—1, 2) на $S$. Поэтому общее число граничных ребер (1, —2) есть сумма числа ребер (1, —2) на $S$ и числа ребер (—1, 2) на $S$ тоже. Но эта же сумма равна общему числу перемен знаков отметок при прохождении по $S$ от точки $A$ до точки $B$, а это число нечетное. Получилось противоречие.

7. Автором этой задачи является Г. Штейнгауз (см. [6, с. 19], [7, с. 103 и 211]). Интересно отметить, что в книге [7] приводится только решение, опубликованное впервые в польском журнале «Математика» и отвергнутое автором как ошибочное.

Назовем ладейным массивом (или, для краткости, просто массивом) такое множество ладейных полей, что ладья, проходя только по своим полям, может перейти с любого поля этого множества на любое другое его поле. Совокупность всех ладейных полей доски разбивается на отдельные массивы так, что из одного массива в другой ладья не может попасть. Таким образом, у двух разных массивов не может быть общих полей, но у них могут быть общие угловые точки полей.

Массив может иметь дыры, либо состоящие сплошь из королевских полей, либо содержащие в себе другие массивы. Если массив не имеет дыр, то он обладает только одной, а именно внешней границей; в противном случае у него имеются еще внутренние границы (одна или несколько).

Мы считаем очевидным, что внешняя граница массива является замкнутой ломаной линией без самопересечений, и поэтому если массив не содержит полей, лежащих на краю доски, то король может свободно обойти вокруг него по своим полям, примыкающим к внешней границе этого массива. Если в массиве имеются краевые поля доски, то король уже не может обойти вокруг всего массива, и его движение заканчивается на краю доски. Всем этим прогулкам короля не препятствует наличие угловых точек, общих с другими массивами. Указанные факты иллюстрируются рис. 45, на котором ладейные поля отмечены крестиками, а путь короля — пунктиром.

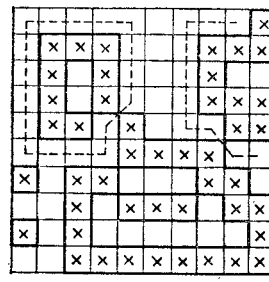


Рис. 45

Утверждение задачи мы будем доказывать от противного: предположим, что при любом выборе начальной позиции ладья не может пройти по своим полям от нижнего края доски до верхнего. Докажем, что тогда король пройдет от левого края доски до правого.

Пусть ладья, начав движение с некоторого поля первой (самой нижней) горизонтали, добралась до $i$-й горизонтали, но не может перейти на $(i+1)$-ю горизонталь (рис. 46).

В дальнейшем рассматриваются только такие массивы, которые имеют поля на $i$-й горизонтали. Все эти массивы разобъем на

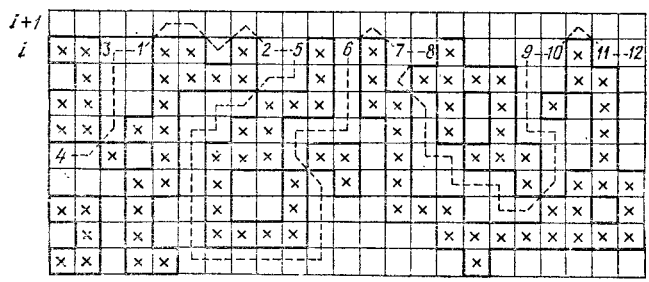



Рис. 46

два класса: «хорошие» и «плохие». Если массив имеет хотя бы одно поле на первой горизонтали, назовем его хорошим, в противном случае — плохим. Следовательно, по каждому хорошему массиву ладья может подняться от первой до $i$-й горизонтали, а по плохому — не может. Хорошие массивы обязательно имеются в силу сделанного предположения.

Согласно этому же предположению над каждым полем $i$-й горизонтали, принадлежащим любому хорошему массиву, должно

стоять королевское поле. Это значит, что все хорошие массивы расположены в части доски, образованной первой, второй, ... ..., $i$-й горизонталями. На плохие массивы такое ограничение не распространяется.

Рассмотрим внимательнее $i$-ю горизонталь доски. Если все ладейные поля этой горизонтали принадлежат только одному массиву (который в таком случае должен быть непременно хорошим), то король легко проходит от левого края доски к правому. Именно, если при этом все поля $i$-й горизонтали — ладейные, то он проходит по одной только $(i+1)$-й горизонтали, в противном случае он идет по своим полям $i$-й горизонтали и по тем полям $(i+1)$-й горизонтали, которые расположены над ладейными полями $i$-й горизонтали.

Поэтому можно считать, что ладейные поля $i$-й горизонтали относятся к разным массивам. В этом предположении прогуляемся по ней слева направо и отметим по порядку встречи следующие группы полей:

1) сначала нам может встретиться группа королевских полей, которую мы назовем краевой группой; однако краевой группы может не быть, и тогда первой будет группа ладейных полей, принадлежащих одному и тому же массиву и, возможно, перемежающихся с королевскими полями;

2) группа идущих подряд королевских полей, которую назовем отделяющей группой;

3) вторая группа ладейных полей, принадлежащих тоже какому-то одному, но уже другому массиву и тоже, возможно, перемежающихся с королевскими полями;

4) снова отделяющая группа идущих подряд королевских полей, и т. д., вплоть до правого края доски; последней будет либо группа ладейных полей какого-то одного массива, либо краевая группа королевских полей.

Заметим, что некоторые из этих групп (или даже все) могут состоять из одного поля. Важно еще заметить, что разные (но не соседние) группы ладейных полей могут принадлежать одному и тому же массиву: они соединяются между собой полями, расположенными вне $i$-й горизонтали.

Путь короля от левого края доски к правому мы будем строить по частям, стараясь проводить его через отделяющие и краевые группы полей. Возьмем какой-нибудь хороший массив и группу его полей на $i$-й горизонтали. Слева и справа от этой группы находятся, вообще говоря, отделяющие группы полей. Мы проводим короля от левой отделяющей группы к правой по полям $i$-й и $(i+1)$-й горизонталей (см. рис. 46, где начальный и конечный пункты этого пути отмечены числами 1 и 2). Дальше король идет по левой отделяющей группе справа налево до встречи со следующим массивом (на рисунке — путь от поля 1 до поля 3). Если этот массив хороший, то дальше король проходит по полям $i$-й и $(i+1)$-й горизонталей справа налево до встречи с новой отделяющей (или краевой) группой. Если же этот массив плохой, то король обходит его по своим полям, прилегающим к внешней границе массива, в направлении по часовой стрелке. Так как массив не содержит полей первой горизонтали, то король дойдет либо до новой отделяющей (или краевой) группы полей, либо до левого края доски (на рисунке — путь от поля 3 до поля 4).

Действуя так дальше, проведем короля от «середины» $i$-й горизонтали до левого края доски, т. е. в направлении, противоположном нужному. Аналогично строим путь от середины до пра-

вого края, с тем отличием, что теперь король проходит над хорошими массивами слева направо и обходит плохие массивы против часовой стрелки. Окончательно путь короля на рис. 46 выглядит так: от поля 4 к полю 3, от 3 к 1, от 1 к 2, от 2 к 5, от 5 к 6 и дальше по порядку номеров до поля 12.

Утверждение задачи сохраняется, если короля заменить ферзем или если короля и ладью поменять ролями. В случае двух ладей ситуация иная: отдайте, например, одной ладье все белые поля, а другой — все черные, и ни одна из них не сдвинется с места.

Эта задача используется в доказательстве теоремы о неподвижной точке (см. § 8).

**8.** Доказательство проведем методом прогулок. Пусть все поля доски уже заняты каким-то образом белыми и черными фишками, причем две белые стороны заняты белыми, а две черные — черными фишками; угловые поля могут быть заняты либо белыми, либо черными фишками. Соединим центры каждой пары соседних шестиугольных полей прямолинейными отрезками. Тогда получится («двойственный») ромб, триангулированный на правильные треугольники (рис. 47, *а*). Каждому шестиугольному полю доски соответствует своя вершина триангуляции двойственного ромба. Вершины, соответствующие белым полям (или фишкам), отметим числом 0, остальные вершины — числом 1. Дверью назовем ребро триангуляции, имеющее разные отметки. Легко видеть, что граней-тупиков не существует. Поэтому, начиная прогулку в одном углу двойственного ромба, мы закончим ее в другом его углу. На рис. 47, *б* наш путь соединяет нижнюю и верхнюю стороны ромба. Это значит, что выиграли белые.

Эта задача, как и предыдущая, может быть использована в доказательстве теоремы о неподвижной точке.

**10.** Пусть $m$ — число всех ребер, $n$ — число всех вершин и $k_1, \ldots, k_n$ — кратности этих вершин. Тогда

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 2m,$$

так как каждое ребро учитывается в кратности каждого из своих концов. Если теперь некоторые слагаемые в левой части этого равенства нечетны, то их число должно быть четным.

**11.** Пусть вершины каждой грани многоугольника отмечены числами 0, 1 и 2. Расставим на каждом ребре стрелки в направлении от 0 к 1, от 1 к 2 и от 2 к 0. Тогда каждая грань получает определенную ориентацию: одни грани по часовой стрелке, другие — против; причем каждые две соседние грани всегда имеют противоположную ориентацию. Поэтому, окрашивая грани первого типа в белый, а второго типа — в черный цвет, мы получим правильную раскраску.

Обратно, пусть грани триангуляции правильно раскрашены. Если ребро триангуляции является стороной черной треугольной грани, то отметим на этом ребре стрелкой такое направление, чтобы внутренние точки этой грани оставались слева. Тогда каждая черная грань будет ориентирована против часовой стрелки, а некоторые белые (за исключением тех, которые примыкают к границе многоугольника) — по часовой стрелке (рис. 48, а).

Предположим, что мы вышли из какой-то вершины триангуляции, прошли вдоль замкнутого пути, определяемого направлением стрелок (возможно, имеющего точки самопересечения), и вернулись в исходную вершину. Тогда число пройденных нами ребер делится на 3. Действительно, если выбросить все грани

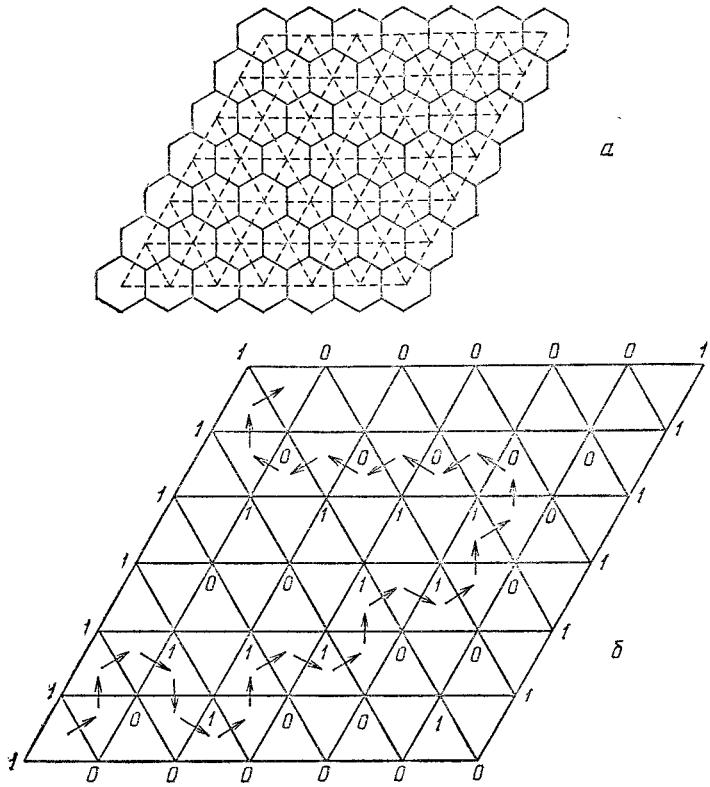



Рис. 47

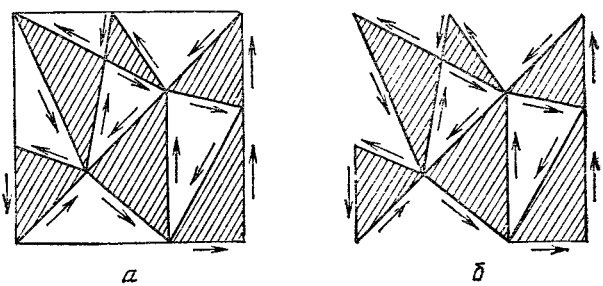



Рис. 48

триангуляции, лежащие вне пройденного пути, то останется многоугольник $P$ такой, что к его границе (т. е. к пройденному нами пути) примыкают его грани только одного цвета (для определенности черного) (рис. 48, *б*). Чтобы найти число всех граничных ребер многоугольника $P$, надо из общего числа ребер всех его черных граней вычесть общее число ребер всех белых граней. Но два последних числа кратны трем, поэтому их разность — тоже кратна трем.

Итак, число ребер в замкнутом пути указанного типа делится на 3. Отсюда следует, что если мы пройдем по ребрам от вершины $A$ до вершины $B$ двумя разными путями и один из них содержит $p$ ребер, а другой — $q$ ребер, то разность $p - q$ делится на 3.

Ясно, что из любой вершины триангуляции можно пройти по ребрам в любую другую вершину. При этом мы, вообще говоря, не обращаем внимания на направления стрелок на ребрах. Однако можно добиться того, чтобы движение происходило всегда по направлению стрелок; а именно, если где-то мы проходили ребро против стрелки, то можно сделать обход по двум другим ребрам соседней грани уже по направлению стрелок. Аналогичный обход делается и в том случае, когда путь проходит по граничному ребру исходного многоугольника, не снабженному стрелкой.

Выберем теперь какую-нибудь вершину $A$, и пусть $B$ — любая другая вершина. Путь по ребрам от $A$ до $B$ (по направлению стрелок) можно провести разными способами, и при этом разные пути имеют разное число ребер, но, в силу сказанного выше, остаток от деления на 3 всех этих чисел один и тот же. Отнесем этот остаток вершине $B$ в качестве ее отметки. Проделаем это же для всех других вершин. Тогда они окажутся занумерованными числами 0, 1 и 2. При этом, как легко видеть, каждая грань будет нести три разных отметки.

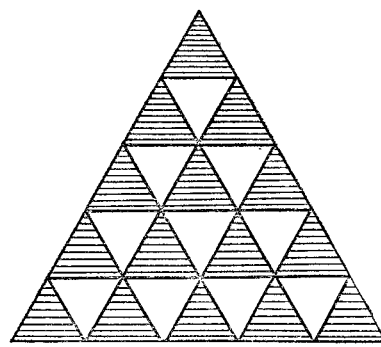


Рис. 49

Итак, мы доказали эквивалентность утверждений а) и б) задачи. Можно доказать, что каждому из них эквивалентно следующее утверждение: в) кратности всех внутренних (не лежащих на границе многоугольника) вершин триангуляции четны.

12. Рассмотрим заштрихованные треугольники (рис. 49). В каждом из них при любой раскраске вершин число сторон, соединяющих вершины разного цвета, четно (равно 0 или 2). Общее число таких «пестрых» ребер во всей триангуляции равно сумме чисел пестрых сторон всех заштрихованных треугольников, и поэтому тоже четно.

Утверждение задачи не сохраняется для произвольных триангуляций треугольника. Для произвольного многоугольника можно доказать эквивалентность следующих трех утверждений: а) при любой двухцветной раскраске всех вершин триангуляции число пестрых ребер четно, б) кратности всех вершин четны, в) существует правильная двухцветная раскраска всех граней с учетом внешней дополнительной области (последнее означает, что область

плоскости, дополнительная к многоугольнику, считается белой, и тогда все его грани, прилегающие к границе, — черные).

13. а) Отображение $f$ — постоянно: оно принимает одно и то же значение $y_0$ во всех точках $X$; б) отображение $f$ может быть любым, так как в качестве $\varepsilon$-окрестности точки $y_0$ можно взять множество $Y$ целиком.

14. Нам заданы: круг радиуса $R$ с центром в точке $O$, точка $x$, лежащая внутри круга на расстоянии $r$ $(0 < r < R)$ от его центра, и точка $y$ — проекция точки $x$ на граничную окружность $C$ (рис. 50). Возьмем число $\varepsilon > 0$. Пусть $A$ — точка пересечения окружности $C$ и окружности радиуса $\varepsilon$ с центром $y$, $B$ — проекция точки $x$ на прямую $OA$. Имеем $yA = \varepsilon$, $xB = \delta$. Нам нужно найти $\delta$, если известны числа $R$, $r$ и $\varepsilon$. Пусть $\varphi$ обозначает величину угла $yOA$ и $OM$ — перпендикуляр из точки $O$ на прямую $yA$. Из треугольника $OxB$ получаем $\delta = r \sin \varphi$, а из треугольника $OAM$: $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\varepsilon}{2R}$. Поэтому

$$\delta = 2r \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 2r \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \varepsilon \frac{r}{2R^2} \sqrt{4R^2 - \varepsilon^2}\,.$$

В частности, отсюда видно, что если $r = 0$, то $\delta = 0$. Это значит, что если $r = 0$, то, какое бы положительное число $\varepsilon$ мы ни взяли, для него не существует соответствующего положительного же числа $\delta$, что еще раз указывает на разрывность радиальной проекции в центре круга.

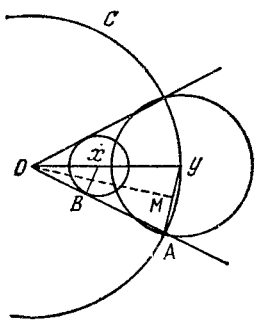


Рис. 50

17. Докажем от противного ограниченность функции сверху, т. е. существование числа $M$. Если бы такого $M$ не было, то на отрезке $[a, b]$ нашлась бы точка $x_1$, в которой $f(x_1) > 1$, затем точка $x_2$, в которой $f(x_2) > 2$, ..., точка $x_n$, в которой $f(x_n) > n$, и т. д. Ввиду компактности отрезка из последовательности точек $\{x_n\}$ выделяется подпоследовательность, сходящаяся к некоторой точке $x_0$ из $[a, b]$. (Для простоты считаем, что сама последовательность $\{x_n\}$ сходится к $x_0$.) Функция $f$ непрерывна в точке $x_0$, т. е. для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность точки $x_0$, что образы всех точек $x$ из этой окрестности лежат в $\varepsilon$-окрестности точки $f(x_0)$. Последнее означает, что выполнены неравенства

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

(только второе из них нам нужно). Так как последовательность $\{x_n\}$ сходится к $x_0$, то все ее точки, начиная с некоторого номера $n_0$, лежат в найденной окрестности точки $x_0$, и поэтому для всех $n \geqslant n_0$ имеем $f(x_n) < f(x_0) + \varepsilon$, что противоречит предположенным неравенствам $f(x_n) > n$. Это доказательство годится для любого компакта, а не только для отрезка.

18. Пусть $f$ — непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ в себя. Если хотя бы один из концов отрезка неподвижен, то доказывать нечего. В противном случае рассмотрим на $[a, b]$ непрерывную

функцию $g(x) = f(x) - x$. Имеем $g(a) > 0$, $g(b) < 0$. По теореме о промежуточных значениях существует такая точка $x_0$, что $g(x_0) = 0$. Значит, $f(x_0) = x_0$.

**19.** Пусть $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и пусть для определенности $f(a) < c < f(b)$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой $d = \frac{a+b}{2}$. Если $f(d) = c$, то все доказано. Если же, например, $f(d) < c$, то переходим к отрезку $[d, b]$ и действуем дальше по аналогии с данным в тексте доказательством теоремы о неподвижной точке.

**20.** Если $f(a) = g(a)$ или $f(b) = g(b)$, то все доказано. В противном случае имеем $f(a) - g(a) < 0$ и $f(b) - g(b) > 0$ и утверждение следует из теоремы о промежуточных значениях, примененной к функции $h(x) = f(x) - g(x)$ на $[a, b]$. Утверждение неверно, если $g$ — произвольная непрерывная функция на $[a, b]$.

**21.** Пусть $x_1$ и $x_2$ — такие точки отрезка $[a_1, a_2]$, что $f(x_1) = b_1$, $f(x_2) = b_2$, и пусть для определенности $b_1 < a_1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant a_2 < b_2$. Утверждение следует из теоремы о промежуточных значениях, примененной к функции $f(x) - x$ на отрезке $[x_1, x_2]$.

**22.** Каждая неподвижная точка отображения $f$ является таковой же для $g = f^2$. Поэтому мы можем считать, что $f$ имеет только одну неподвижную точку $x_0$, а также, что $a < x_0 < b$, $f(x) > x$ при $a \leqslant x < x_0$ и $f(x) < x$ при $x_0 < x \leqslant b$. Так как $f$ отображает отрезок на себя, то найдутся точка $x_1 (a \leqslant x_1 < x_0)$ такая, что $f(x_1) = b$, и точка $x_2 (x_0 < x_2 \leqslant b)$ такая, что $f(x_2) = a$. По теореме о промежуточных значениях существует такая точка $x_3 (x_1 \leqslant x_3 < x_0)$, что $f(x_3) = x_2$. Поэтому $g(x_3) = f(f(x_3)) = f(x_2) = a$. Если $g(a) = a$, то отображение $g$ имеет две неподвижные точки: $a$ и $x_0$. В противном случае имеем $g(a) > a$, $g(x_3) = a < x_3$ и, применяя теорему о промежуточных значениях к функции $g(x) - x$ на отрезке $[a, x_3]$, видим, что фуикция $g$ имеет неподвижную точку $x_4$ $(a < x_4 < x_3)$.

Если $f$ отображает отрезок $[a, b]$ в себя (но не обязательно на себя), то $g = f^2$ может иметь только одну неподвижную точку.

**24.** Если $x \neq 0$, то уравнение можно записать в виде

$$x^3 \left( a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} \right) = 0.$$

При очень большом $|x|$ выражение в скобках мало отличается от $a_0$. Поэтому если $x > 0$ и $x$ — очень большое число, то левая часть уравнения имеет тот же знак, что и $a_0$, а если $x < 0$ и $|x|$ очень большое, то — противоположный знак. Остается заметить, что многочлен третьей степени — непрерывная функция от $x$. Аналогичными рассуждениями доказывается, что если $\frac{a_3}{a_0} < 0$, то написанное уравнение имеет хотя бы один положительный корень, а если $\frac{a_3}{a_0} > 0$, то хотя бы один отрицательный.

**25.** Утверждение следует из теоремы Борсука — Улама.

**26.** Применить теорему Борсука — Улама можно только в том случае, если температура в начале и в конце часа одинакова. Тогда действительно найдутся два указанных момента времени.

**27.** Утверждение верно, когда каждый из многоугольников имеет четное число сторон. Если хотя бы один из них имеет нечетное число сторон, то утверждение верно только при условии, когда

какая-то из его вершин лежит на прямой, проходящей через центры многоугольников.

28. Проведем на плоскости произвольную прямую $L$ и заключим заданную кривую $K$ в полосу наименьшей возможной ширины, образованную двумя прямыми, параллельными $L$. Эти две прямые называются *опорными* к кривой $K$. Затем заключим $K$ в полосу, образованную двумя опорными прямыми, перпендикулярными к прямой $L$. Мы получим описанный вокруг $K$ прямоугольник. Если теперь непрерывным движением повернуть прямую $L$ на угол $\frac{\pi}{2}$, то две пары опорных прямых поменяются местами. Поэтому если расстояние между прямыми у одной пары было больше, чем у другой, то после поворота оно сделается меньше; значит, в какой-то момент эти расстояния сравняются, и тогда в пересечении получится квадрат.

**32.** Пусть $a$ — любое действительное число. Положим $M = \frac{|a - f(a)|}{1 - \alpha}$, где $\alpha$ — число из неравенства (9.2). Покажем, что отрезок $[a - M,\ a + M]$ переводится в себя отображением $f$. Действительно, пусть $x$ — любая точка из этого отрезка. Тогда

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \alpha |x - a| \leqslant \alpha M,$$

и поэтому

$$|f(x) - a| = |f(x) - f(a) + f(a) - a| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x) - f(a)| + |f(a) - a| \leqslant \alpha M + |f(a) - a|.$$

Используя определение числа $M$, здесь можно заменить $|f(a) - a|$ на $(1 - \alpha)M$. Тогда

$$|f(x) - a| \leqslant \alpha M + (1 - \alpha) M = M,$$

что и требовалось доказать.

**33.** Ответ утвердительный. Покажем, что заданное отображение $f$ является сжатием на всей числовой прямой. Для любых действительных чисел $x$ и $y$ имеем

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{4 + x^2} - \frac{1}{4 + y^2} \right| = \frac{|x^2 - y^2|}{(4 + x^2)(4 + y^2)} =$$
$$= \frac{|x + y|}{(4 + x^2)(4 + y^2)} |x - y|. \qquad (\text{Р.1})$$

Применяя известное неравенство $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a + b}{2}$ (где $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$) к случаю, когда $a = 4$ и $b = x^2$, получаем

$$|x| = \frac{1}{2} \sqrt{4x^2} \leqslant \frac{4 + x^2}{4}.$$

Поэтому

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| \leqslant \frac{4 + x^2 + 4 + y^2}{4} \leqslant 2 + \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^2 y^2}{8} =$$
$$= \frac{1}{8}(4 + x^2)(4 + y^2).$$

Подставляя эту оценку в равенство (P.1), получаем

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{1}{8}|x-y|,$$

что и требовалось.

**34.** а) Нет; б) нет (непрерывное отображение восьмерки в себя без неподвижных точек можно получить, например, так: первая окружность отображается в общую точку обеих окружностей, затем вторая окружность поворачивается на малый угол, отличный от нуля).

**35.** а) Да (круг можно непрерывно спроецировать на триод вдоль пунктирных линий (рис. 51)); б) да; в) нет, ибо «восьмерка» не обладает свойством неподвижной точки.

**36.** а) Да; б) да; в) да.

**37.** Нет.

**38.** Нет.

**39.** Да. Вот эскиз доказательства. Пусть $X$ — компакт, $Y$ — его подмножество и $f\colon X\to Y$ — ретракция. Пусть $\{y_n\}$ — последовательность точек из $Y$. Из $\{y_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0$ из $X$. При отображении $f$ каждая точка $y_{n_k}$ остается неподвижной, а поэтому $x_0$ тоже неподвижна. Значит, $x_0$ содержится в $Y$, и поэтому $Y$ — компакт.

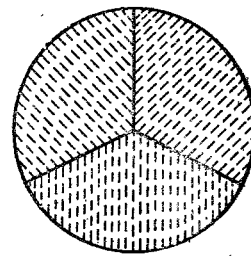


Рис. 51

**40.** Да. Например, можно сначала непрерывно спроецировать квадрат на одну его сторону, а затем эту сторону растянуть на всю границу.

**41.** Доказываем от противного: пусть в круге $K$ имеется такая точка $q$, что для любой точки $p$ из круга $K$ имеем $f(p)\neq q$, т. е. $q$ не принадлежит образу круга. Так как отображение $f$ тождественно на окружности $C$, то точка $q$ обязана лежать внутри $K$, а не на $C$. Пусть $\varphi$ — центральное проецирование образа круга из точки $q$ на $C$. Тогда композиция отображений $f$ и $\varphi$ является ретракцией $K$ на $C$. Так как такая ретракция невозможна, то утверждение доказано.

**42.** Доказательство от противного: пусть для любой точки $p$ из круга $K$ имеем $f(p)\neq g(p)$. Проведем луч из точки $g(p)$ к точке $f(p)$ и продолжим его до пересечения с граничной окружностью $C$ в точке $\varphi(p)$. Обозначим теперь $f(p)=q$ и $\varphi(p)=\psi(q)$. Непрерывное отображение $\psi$, переводящее точку $q$ в точку $\psi(q)$, в силу утверждения задачи 41, определено на всем круге $K$ и переводит его в окружность $C$, а на $C$ — тождественно, т. е. является ретракцией $\psi\colon K\to C$. Получаем противоречие. Утверждение неверно, если $g$ — произвольное непрерывное отображение круга в плоскость.

**43.** Гомотопию, связывающую отображения $f_0$ и $f_1$, можно задать по формуле

$$f_t(x)=(1-t)f_0(x)+tf_1(x),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

**44.** Степень отображения $f$ равна 12: она равна отношению скоростей движения минутной и часовой стрелок. Отображение $f$ имеет одиннадцать неподвижных точек: 0 часов, $1\frac{1}{11}$ часа,

$2\frac{2}{11}$ часа, $3\frac{3}{11}$ часа и т. д. Так как каждому положению минутной стрелки могут соответствовать различные положения часовой стрелки, то отображение $\varphi$ не определено.

**45.** Степень первого отображения равна 2; оно имеет одну неподвижную точку: 0 часов. Степень второго отображения равна $-1$; оно имеет две неподвижные точки: 0 часов и 6 часов. Степень третьего отображения равна 1; оно не имеет неподвижных точек.

**51.** Если $n = 0$, то это — отображение, переводящее всю сферу в одну ее точку, или вообще такое отображение, при котором образ сферы не покрывает ее. Если $n \neq 0$, то представим себе сферу в виде поверхности земного шара с географическими координатами. Нужное отображение получится, если каждую точку перевести в точку с той же широтой и $n$-кратной долготой.

**54.** На сфере имеется такая точка $x$, что $f(f(x)) = x$ (задача 53). Тогда, вводя обозначение $f(x) = y$, имеем $f(y) = x$. Если $x = y$, то эта точка неподвижна, в противном случае отображение переставляет точки $x$ и $y$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Балк М. Б., Болтянский В. Г. Геометрия масс. — М.: Наука, 1987. — (Б-чка «Квант»; Вып. 67).
2. Болтянский В. Г. Метод итераций//Квант. — 1983. — № 3. — С. 16—21, 37.
3. Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. — М.: Наука, 1982. — (Б-чка «Квант»; Вып. 21).
4. Виленкин Н. Я. Метод последовательных приближений. — М.: Наука, 1968. — (Популярные лекции по математике; Вып. 35).
5. Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии. — М.: Мир, 1967. — (Современная математика. Популярная серия).
6. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. — М.: Наука, 1981. — (Б-чка «Квант»; Вып. 8).
7. Штейнгауз Г. Задачи и размышления. — М.: Мир, 1974.

Научно-популярное издание

**ШАШКИН Юрий Алексеевич**

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

Популярные лекции по математике, выпуск 60

Заведующий редакцией *Н. А. Угарова*
Редактор *Т. А. Панькова*
Художественный редактор *Л. Н. Романенкова*
Технический редактор *А. П. Колесникова*
Корректор *И. Я. Кришталь*

ИБ № 32474

Сдано в набор 24. 06. 88. Подписано к печати 02.02.89. Формат 84×108/32.
Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая.
Усл. печ. л. 4,2. Усл. кр.-отт. 4,41. Уч.-изд. л. 4,54. Тираж 92 000 экз.
Заказ № 1116. Цена 20 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

Shashkin, Yu. A. **Fixed points.**

This small book is written for the Russian series «Popular lectures on mathematics». It is an elementary and selfcontained introduction to fixed point theory, and can help a beginner to become familiar with this beautiful branch of topology. The book is intended for a wide circle of readers, including pupils of senior classes of secondary school, who are interested in mathematics, as well as for freshmen and sophomores of universities.

The author Yu. A. Shashkin is a senior scientific researcher of the Institute for Mathematics and Mechanics, the Ural Branch of the USSR Academy of Sciences at Sverdlovsk. He is the author of the booklet «The Euler characteristics» («Nauka», Moscow, 1984, 96 pp.) (see Mathematical Reviews, 86h : 52006). His research interests are in mathematical analysis, topology, and combinatorial geometry.

The main purpose of the book «Fixed points» is to prove two following fixed points theorems of Brouwer: 1. Every continuous map of a square (or of a segment) into itself has a fixed point. 2. Every continuous map of a 2-sphere (or of a circle) into itself, whose degree is not equal to $\pm 1$, has a fixed point and sends some point in its antipode.

The Brouwer fixed point theorem is proved for a square, but not for a triangle, as usually. This allows the author to avoid the use of barycentric coordinates in this proof.

The second aim of this book is to discuss some combinatorial questions related to the partition (the triangulation) of figures into smaller parts, joining each other in a regular manner. In particular, the emphasis is on the use of Sperner's lemma and its ramifications. These combinatorial statements are proved by the method of «walks through the rooms of a house» (or, briefly, «walking-process»).

The notion of degree is firstly defined for piecewise-linear mappings of a 2-sphere into itself; existence of the degree is proved in this case also by the walking-process; then it is defined for any continuous mapping.

The section headings are as follows: Preface. 1. Continuous maps of a segment and of a square. 2. The first combinatorial lemma. 3. The second combinatorial lemma, or walks through the rooms of a house. 4. Sperner's lemma. 5. Continuous maps. Homeomorphisms. The fixed point property. 6. Compactness. 7. The proof of Brouwer's theorem for a segment. The intermediate values theorem. Applications. 8. The proofs of Brouwer's theorem for a square. 9. Method of iterations. 10. Retraction. 11. Continuous maps of a circle. Homotopy. Degree of a map. 12. The second definition of the degree. 13. Continuous maps of a sphere. Solutions and answers.

The book contains 80 pages, 51 illustrations, 54 problems, and solutions or answers to most of them.

## ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. **А. И. Маркушевич.** Возвратные последовательности.
Вып. 2. **И. П. Натансон.** Простейшие задачи на максимум и минимум.
Вып. 3. **И. С. Соминский.** Метод математической индукции.
Вып. 4. **А. И. Маркушевич.** Замечательные кривые.
Вып. 5. **П. П. Коровкин.** Неравенства.
Вып. 6. **Н. Н. Воробьев.** Числа Фибоначчи.
Вып. 7. **А. Г. Курош.** Алгебраические уравнения произвольных степеней.
Вып. 8. **А. О. Гельфонд.** Решение уравнений в целых числах.
Вып. 9. **А. И. Маркушевич.** Площади и логарифмы.
Вып. 10. **А. С. Смогоржевский.** Метод координат.
Вып. 11. **Я. С. Дубнов.** Ошибки в геометрических доказательствах.
Вып. 12. **И. П. Натансон.** Суммирование бесконечно малых величин.
Вып. 13. **А. И. Маркушевич.** Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. **А. И. Фетисов.** О доказательствах в геометрии.
Вып. 15. **И. Р. Шафаревич.** О решении уравнений высших степеней.
Вып. 16. **В. Г. Шерватов.** Гиперболические функции.
Вып. 17. **В. Г. Болтянский.** Что такое дифференцирование?
Вып. 18. **Г. М. Миракьян.** Прямой круговой цилиндр.
Вып. 19. **Л. А. Люстерник.** Кратчайшие линии.
Вып. 20. **А. М. Ловшиц.** Вычисление площадей ориентированных фигур.
Вып. 21. **Л. И. Головина и И. М. Яглом.** Индукция в геометрии.
Вып. 22. **В. Г. Болтянский.** Равновеликие и равносоставленные фигуры.
Вып. 23. **А. С. Смогоржевский.** О геометрии Лобачевского.
Вып. 24. **Б. И. Аргунов и Л. А. Скорняков.** Конфигурационные теоремы.
Вып. 25. **А. С. Смогоржевский.** Линейка в геометрических построениях.
Вып. 26. **Б. А. Трахтенброт.** Алгоритмы и машинное решение задач.
Вып. 27. **В. А. Успенский.** Некоторые приложения механики к математике.
Вып. 28. **Н. А. Архангельский и Б. И. Зайцев.** Автоматические цифровые машины.
Вып. 29. **А. Н. Костовский.** Геометрические построения одним циркулем.
Вып. 30. **Г. Е. Шилов.** Как строить графики.
Вып. 31. **А. Г. Дорфман.** Оптика конических сечений.
Вып. 32. **Е. С. Вентцель.** Элементы теории игр.
Вып. 33. **А. С. Барсов.** Что такое линейное программирование.
Вып. 34. **Б. Е. Маргулис.** Системы линейных уравнений.

Вып. 35. **Н. Я. Виленкин.** Метод последовательных приближений.
Вып. 36. **В. Г. Болтянский.** Огибающая.
Вып. 37. **Г. Е. Шилов.** Простая гамма (устройство музыкальной шкалы).
Вып. 38. **Ю. А. Шрейдер.** Что такое расстояние?
Вып. 39. **Н. Н. Воробьев.** Признаки делимости.
Вып. 40. **С. В. Фомин.** Системы счисления.
Вып. 41. **Б. Ю. Коган.** Приложение механики к геометрии.
Вып. 42. **Ю. И. Любич и Л. А. Шор.** Кинематический метод в геометрических задачах.
Вып. 43. **В. А. Успенский.** Треугольник Паскаля.
Вып. 44. **И. Я. Бакельман.** Инверсия.
Вып. 45. **И. М. Яглом.** Необыкновенная алгебра.
Вып. 46. **И. М. Соболь.** Метод Монте-Карло.
Вып. 47. **Л. А. Калужнин.** Основная теорема арифметики.
Вып. 48. **А. С. Солодовников.** Системы линейных неравенств.
Вып. 49. **Г. Е. Шилов.** Математический анализ в области рациональных функций.
Вып. 50. **В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг.** Разбиение фигур на меньшие части.
Вып. 51. **Н. М. Бескин.** Изображения пространственных фигур.
Вып. 52. **Н. М. Бескин.** Деление отрезка в данном отношении.
Вып. 53. **Б. А. Розенфельд и Н. Д. Сергеева.** Стереографическая проекция.
Вып. 54. **В. А. Успенский.** Машина Поста.
Вып. 55. **Л. Бераи.** Упорядочные множества.
Вып. 56. **С. А. Абрамов.** Элементы программирования.
Вып. 57. **В. А. Успенский.** Теорема Гёделя о неполноте.
Вып. 58. **Ю. А. Шашкин.** Эйлерова характеристика.
Вып. 59. **Л. А. Скорняков.** Системы линейных уравнений.
Вып. 60. **Ю. А. Шашкин.** Неподвижные точки.